El abecé de...

Horacio Itzcovich (Coord.)
Beatriz Ressia de Moreno
Andrea Novembre
María Mónica Becerril

La Matemática escolar

Las prácticas de enseñanza en el aula

Colección dirigida por Silvina Gvirtz

Mención Mejor Libro de Educación 2008, Fundación El Libro.

AIQUE Educación

Itzcovich, Horacio
La matemática escolar : Las prácticas de enseñanza en el aula / Horacio Itzcovich ; con colaboración de: Beatriz Ressia de Moreno ; Andrea Novembre ; María Mónica Becerril ; dirigido por Silvina Gvirtz - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
240 p. ; 16x23 cm. (Nueva Carrera Docente)

ISBN 978-987-06-0113-5

1. Matemática. 2. Educación Primaria Básica. I. Ressia de Moreno, Beatriz, colab. II. Novembre, Andrea, colab. III. Becerril, María Mónica , colab. IV. Gvirtz, Silvina, dir. V. Título
CDD 372.7

Dirección editorial
Teresita Valdettaro

Coordinación Aique Educación
Silvia Hurrell

Edición
Ruth Schaposchnik

Copiedición
Maricel Besse

Corrección
Cecilia Biagioli

Diseño de Colección y Supervisión gráfica
Verónica Uher - Victoria Maier

Foto de tapa
Leandro Piacentino

FUNDACION BUNGE Y BORN

Universidad de San Andrés

Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF) Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
E-mail: editorial@aique.com.ar - http://www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11723.
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN: 978-987-06-0113-5
Primera edición - Primera reimpresión

Esta edición se terminó de imprimir en mayo de 2008 en
Primera Clase Impresores, California 1231, Ciudad de Buenos Aires.

Índice

Introducción

Este libro intenta ser un aporte más para reflexionar sobre la difícil tarea de enseñar Matemática a los niños en edad escolar. Pero a su vez, puede resultar un material útil en el acompañamiento a diferentes instituciones y a sus docentes, si se plantean el desarrollo de una tarea de estudio y actualización.

Por eso, se despliegan diferentes tipos de situaciones: algunas implican lecturas, otras proponen actividades para que realicen los docentes, también, existen aquellas que involucran el trabajo con los alumnos. Cada uno de estos tipos de situaciones se inician o derivan en reflexiones que apuntan a conceptualizar las ideas principales que comandan este proceso, algunas, ya plasmadas en el texto y otras que los lectores deberán producir.

Varias de estas propuestas podrán ser trabajadas de manera individual, y otras demandarán el debate con colegas para propiciar el intercambio de miradas y opiniones. Para tal fin, este libro se ha organizado en siete capítulos que tratan algunos de los aspectos centrales de la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria.

El capítulo 1 propone una discusión sobre las características y el sentido del trabajo matemático, marco que condiciona los posteriores encuadres que se adoptan en el resto de los capítulos. Esta concepción de la actividad matemática será la que se intenta que los alumnos experimenten, en la que se involucren, la que conozcan y por la que se apasionen al tratar con los diferentes contenidos que la escuela se compromete a enseñar.

El capítulo 2 desarrolla un tratamiento de los números naturales, así como de las características de nuestro sistema de numeración apoyado en numerosas investigaciones que nos explican los modos en que los alumnos se apropian del sentido de estos objetos matemáticos. A su vez, se analizan diferentes tipos de actividades que ponen de manifiesto las particularidades y las dificultades de los niños cuando se trata de dominar los números y su modo de funcionamiento.

En el capítulo 3, se propicia el análisis de los diferentes sentidos que pueden o deben adquirir, dentro de una escuela, las operaciones de suma y resta. Asimismo, junto a esta variedad de sentidos, se propone un abanico de situaciones tendientes a producir y a comprender diferentes recursos de cálculo que se apoyan tanto en las características del sistema de numeración como en las propiedades de estas operaciones.

Del mismo modo, el capítulo 4 se ocupa del abordaje de la multiplicación y de la división. En este caso, también se propicia un análisis de los diferentes tipos de problemas en los cuales estas operaciones cobran sentido, así como del despliegue de los diferentes recursos de cálculo asociados tanto a los problemas como a las propiedades de las operaciones.

El trabajo escolar en torno a las fracciones es tratado en el capítulo 5, que destaca las rupturas que se presentan al iniciar el tratamiento de este campo numérico en relación con el trabajo con los números naturales. A su vez, se analizan diferentes situaciones para las cuales las fracciones son una herramienta eficaz, así como las relaciones entre estos números y otros conceptos matemáticos que, frecuentemente, la escuela deja a cargo de los niños y no, de la enseñanza.

El capítulo 6 propone un análisis sobre el trabajo geométrico. Asumiendo que la enseñanza de la geometría ha sido "abandonada" en las escuelas, se busca, en este texto, dotar de sentido al trabajo geométrico a partir de un tipo de tarea en la cual lo que se pone en juego es un modo de hacer y de pensar, propio de este recorte cultural.

Finalmente, el capítulo 7 invita a reflexionar sobre la evaluación de los alumnos a la luz de la actividad de estudiar Matemática. Es decir, si los alumnos "no saben estudiar", mal pueden tener un buen desempeño en las evaluaciones. Pero ¿quién les ha enseñado a estudiar Matemática? Este capítulo formula pensamientos en voz alta en torno a esta pregunta.

Esperamos que este libro sea un aporte a la difícil tarea de apasionar y de apasionarse con la producción y la transmisión de los conocimientos matemáticos.

CAPÍTULO 1

¿Qué entendemos por *Matemática* cuando se trata de enseñarla en la escuela?

> Las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales.
>
> Guy Brousseau[1]

Los números naturales, las operaciones básicas, las fracciones, la proporcionalidad, las figuras planas y sus propiedades, los cuerpos y las mediciones son objetos de estudio que pueblan la enseñanza elemental desde tiempos remotos; y nada hace suponer que, en un futuro próximo, estos objetos dejarán de estar ligados a la matemática que se concibe para la escolaridad obligatoria.

Los docentes, seguramente, reconocen en estos "títulos" muchos de los objetos de trabajo con los cuales se deben relacionar los alumnos. Pero cierto es que la relación de los niños con estos conceptos no siempre es clara: ¿deben saber sumar fracciones de distintos denominadores?, ¿deben aprender a hacer la cuenta de dividir?, ¿deben saber a qué se llama *prisma de base cuadrada*?, ¿deben resolver problemas de proporcionalidad directa?, ¿deben demostrar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo?

En función del título de este capítulo, una primera cuestión que podemos afirmar es que la Matemática, para los alumnos, quedará en parte definida y caracterizada por el conjunto de experiencias que les hagamos vivir en relación con los conceptos que se traten. Es decir,

[1] Brousseau, G. (1999): "Educación y Didáctica de las matemáticas", en *Educación Matemática*. México (en prensa).

el trabajo matemático quedará evidenciado ante los ojos de los alumnos a partir de las propuestas que las instituciones educativas les hagan experimentar a lo largo de la escolaridad. Podemos sospechar, entonces, que la Matemática que se decide enseñar, así como su tratamiento, impactan de una manera determinante en lo que los alumnos van a considerar como "cultura matemática".

Le proponemos una primera reflexión vinculada con los párrafos precedentes:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

a. ¿Cuáles cree que son las características principales del trabajo matemático?

b. Intente ejemplificar lo analizado en el ítem **a.** con el concepto de *división*. Es decir, cuáles son las marcas principales del trabajo matemático que se podrían reconocer a lo largo del abordaje del concepto de *división*.

Y al inicio... los problemas

> Nadie dudaría en estos tiempos en reconocer que los problemas son el corazón de la actividad matemática. Brousseau señala que "un alumno no hace matemática si no se plantea y no resuelve problemas".
> El conocimiento matemático ha progresado —y progresa actualmente— en su intento de dar respuesta a necesidades planteadas por la vida cotidiana, por otras ciencias o por la misma matemática. Los problemas han sido el motor de la ciencia matemática en la medida en que su resolución ha permitido elaborar nuevos conceptos, relacionarlos con otros ya conocidos, modificar viejas ideas, inventar procedimientos. Pero esta elaboración no se realiza sin dificultad. Los problemas, a menudo, ofrecen resistencia; las soluciones son casi siempre parciales[2].

[2] Documento de Trabajo N.° 1 *Matemática* (1995). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula.

Esta cita permite reconocer *la resolución de problemas* como una de las actividades principales del trabajo matemático. Si se pretende que los alumnos vayan configurando una idea acerca de lo que es la Matemática, el trabajo que se les proponga deberá tener relación, aunque sea delicado precisar sus límites, con lo que implica resolver problemas matemáticos.

En este aspecto, nos parece interesante analizar, un poco más en detalle, qué entendemos por *problema*.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Imagine a alumnos de 4.° grado de Educación Primaria enfrentados a las situaciones que se detallan a continuación. Le proponemos que analice los siguientes aspectos:

- ¿Cuál o cuáles considera que podrían admitir ser rotulados como "problemas"? ¿Por qué?
- Si alguna de las situaciones queda por fuera de esta categorización, explicite los motivos por los cuales no la ha considerado un "problema".

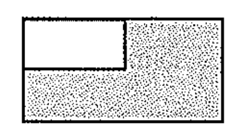
Situaciones:

a. Se les propone a los alumnos el siguiente enunciado sin ninguna consideración ni materiales disponibles: "En una bolsa, hay un cuarto kilo de pan. En otra bolsa, hay medio kilo de pan. Si se ubican las dos bolsas en una balanza, ¿cuánto pesarán?".

b. Se les presentan a los alumnos dos botellas. En una, hay un cuarto litro de agua; y en la otra, hay medio litro. Se trata de averiguar cuánta agua hay entre las dos botellas. Para ello, se les propone volcar el contenido de ambas en una tercera botella de tres cuartos litros y observar cuántos litros hay entre las dos primeras botellas.

c. Se les propone resolver el siguiente cálculo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

d. Se les presenta un dibujo como el siguiente y se les pregunta qué parte del rectángulo está sombreada:



No es sencillo determinar con claridad qué es un problema a la hora de pensarlo en función de los alumnos que asisten a la escuela a aprender. Una primera consideración tiene que ver con el destinatario de la situación. Según los conocimientos de quien se enfrente al enunciado o a la actividad, se podrá decir que representa un problema o no. Es decir, para quien ya domina el concepto de *fracción*, un enunciado como el de la situación **a.** no será un problema en el sentido de un desafío, de un obstáculo para vencer. Ya tiene los recursos necesarios como para responder sin necesidad de establecer nada nuevo. Se podría hablar, en este caso, de un ejercicio de aplicación. En cambio, para quien aún no dispone de recursos, porque se ha iniciado recientemente en el trabajo con las fracciones, la misma situación podría ser considerada un problema, ya que les ofrece una cierta resistencia a sus conocimientos y debe embarcarse en un trabajo de otra naturaleza que el desarrollado por alguien que cuenta con conocimientos variados sobre las fracciones.

Lo mismo podría decirse de la situación **c.** Para quien dispone de un modo ya establecido de sumar fracciones, el cálculo será una situación en la cual aplicar lo ya conocido. Pero para quien aún no se las ha visto con la suma de fracciones, poder producir recursos que den cuenta del resultado pasa a ser un desafío.

En definitiva, podemos decir que un problema es tal en la medida que invita a un desafío y a la toma de decisiones en donde los conocimientos de que se disponen no son suficientes, pero tampoco, tan escasos. La situación debe estar ubicada en el centro de la balanza entre lo "nuevo" por producir y lo "viejo" que ya se sabe.

Y si bien es cierto que los problemas deberían ser el motor de la clase de Matemática, no es suficiente con proponer problemas a los alumnos para que ellos terminen de configurar una idea un poco más acabada del trabajo matemático. "La actividad matemática que potencialmente un problema permitiría desplegar no está contenida en el enunciado del problema"[3], sino que depende de todo lo que se haga a continuación con el problema propuesto. Esta práctica matemática, la mayoría de las veces, no se evidencia ante los ojos

[3] Sadovsky, P. (2005): *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Bs. As.: Libros del zorzal.

de los niños y queda escondida y opacada por la "desesperación" que promueve el "resultado correcto".

> Frente a la resolución de un problema matemático, muchas veces, se hace evidente que, para abordarlo, hacen falta muchos más conocimientos de los que se pueden reconocer como pertenecientes al campo teórico en el que se inserta el problema. Estos conocimientos, en general implícitos, regulan el trabajo Matemático como si, de alguna manera, "dictaran" lo que está permitido hacer (y lo que no), lo que conviene hacer (y lo que no)[4].

Parece ser necesario, entonces, intentar hacer explícitas —más allá del problema— aquellas cuestiones ligadas al trabajo matemático, pues, frecuentemente quedan ocultas e impiden a los alumnos configurarse una idea de lo que involucra la actividad matemática.

Explorar para representar, representar para explorar

Decíamos antes que el enunciado de un problema no advierte a los alumnos de algunas marcas del trabajo matemático. Para iniciar el recorrido en el intento de explicitar estas marcas, le proponemos que realice la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Resuelva los siguientes problemas intentando identificar todas aquellas cuestiones realizadas y desplegadas en la búsqueda de la solución. Estas cuestiones serán más importantes que la resolución de los problemas en el análisis que propiciamos desarrollar.

a. Invente una cuenta de dividir en la cual el dividendo sea 251 y el resto sea 7. ¿Cuántas cuentas se podrán inventar?

b. Invente una cuenta de dividir en la cual el divisor sea 12 y el resto sea 5. ¿Cuántas cuentas se podrán inventar?

[4] Sadovsky, P.: óp. cit.

Una nueva cuestión para considerar como parte del trabajo matemático y que se ve reflejada en la resolución de un problema es el modo de *representar matemáticamente* la situación que se pretende resolver.

Un problema no "dice" cómo representar las relaciones que en él se ponen en juego. Es más, casi siempre se mencionan estas relaciones de manera implícita, aunque a veces, pueden aparecer más explicitadas. Tampoco un enunciado informa cuál es el modo más conveniente de plasmarlas en una hoja. Parte del trabajo matemático involucra la búsqueda de un modo de representar el problema que resulte fértil para su tratamiento.

Pero este modo de representación no es evidente para los alumnos, como así tampoco lo es en numerosas oportunidades para los matemáticos. La producción de un modo de representación requiere, en numerosas ocasiones, de un *trabajo exploratorio*, que puede involucrar el uso de ejemplos, los ensayos con ciertos valores que permitan "ver" los efectos o resultados que se obtienen, darse cuenta de que el camino elegido no conduce a nada y volver a comenzar, seguir analizando cuáles de los conocimientos que se tienen podrían servir, buscar más informaciones por si hay algo que se está "escapando", ir aproximando al tanteo y "observar" qué ocurre, etc. Es decir, avanzar en el sentido de llevar a cabo una exploración con cierto nivel de sistematización que permita, de algún modo, controlar lo que va aconteciendo colabora en la tarea de buscar un mejor modo de representar matemáticamente un problema.

En el caso de la actividad anterior, un modo de representar el ítem **a.** bien podría surgir al comenzar el proceso exploratorio. Por ejemplo, si se decide iniciar un proceso exploratorio imaginando la cuenta de dividir, el problema podría adquirir una representación como la siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 251 & \\ \cline{2-2} 7 & \end{array}$$

A partir de esta representación, es posible comenzar a ensayar con diferentes valores en el divisor e ir ajustándolos con el fin de arribar a la solución:

$$\begin{array}{r|l} 251 & 10 \\ \cline{2-2} 51 & 25 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 251 & 9 \\ \cline{2-2} 71 & 27 \\ 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 251 & 8 \\ \cline{2-2} 11 & 31 \\ 3 & \end{array}$$

Pareciera que este camino no termina de ser del todo efectivo. Bien podría pensarse, entonces, en algún otro tipo de representación acorde con las relaciones que funcionan en el interior de la cuenta de dividir y de la exploración precedente. Es decir, los números buscados, divisor y cociente, deben verificar que, si se le suma 7 al producto entre ellos, se debe obtener por resultado el dividendo, que es 251. Este análisis permite modificar el modo de representar el problema. Si designamos con D al divisor y con C al cociente, se debe cumplir la condición: $C \times D + 7 = 251$, que equivale a proponer que $C \times D = 251 - 7$.

Por lo tanto, los valores de C y D deben verificar que $C \times D = 244$.

Luego, se trata de buscar dos números cuyo producto sea 244. Por ejemplo, 2 y 122. Entonces, una solución sería:

$$\begin{array}{r|l} 251 & 122 \\ \cline{2-2} 7 & 2 \end{array}$$

De esta manera, es posible reconocer que podría haber otras soluciones (que no serán tratadas en este apartado), ya que esta nueva representación permite una exploración de otra naturaleza, que involucra ahora la idea de divisores, la cuestión de conservar el resto menor que el divisor, etc. Pero la intención no es ahondar en las "bondades" del problema, sino en el juego entre exploración y representación que aquel demanda.

Elaborar conjeturas

Otro aspecto que forma parte de la tarea matemática es la *producción de conjeturas*. Para avanzar en este sentido, les proponemos resolver la siguiente actividad:

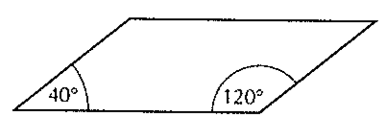
PENSAR LAS PRÁCTICAS

Resuelva los siguientes problemas. Para ello, puede utilizar los instrumentos de geometría que considere convenientes:

a. Construir un paralelogramo en el cual uno de sus lados mida 6 cm y los ángulos adyacentes a dicho lado midan 30° y 150°. ¿Cuántos paralelogramos diferentes se pueden construir con las mismas condiciones?

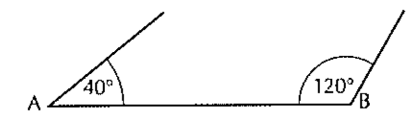
b. Construir un paralelogramo en el cual uno de sus lados mida 4 cm y los ángulos adyacentes a este midan 40° y 120°. ¿Cuántos paralelogramos diferentes se pueden construir con las mismas condiciones?

Como ya se ha mencionado anteriormente, la exploración y la selección de un modo de representación es parte de la tarea en estos problemas también. En algunos casos, un primer ensayo se apoya en bosquejos o dibujos sobre los que se vuelca la información para "tenerla más disponible". Por ejemplo, para resolver la parte **b.** de la actividad anterior, se podría hacer un dibujo de un paralelogramo cualquiera y volcar allí los datos conocidos, antes de empezar la construcción, aunque en numerosas oportunidades no es necesario realizar este dibujo anticipatorio, pues se va desarrollando sobre la "marcha":



Ahora bien, comenzada la construcción, se observa un cierto despliegue de las relaciones que puede "orientar o desorientar". Es decir, si se realiza el dibujo con las medidas propuestas en el enunciado

—el lado AB mide 4 cm, el ángulo A mide 40°, y el ángulo B mide 120°—, se obtiene lo siguiente:



El dibujo "muestra" que será difícil terminar de armar el paralelogramo. Pero no "explica" qué está ocurriendo. Allí es viable la aparición de una conjetura: "*parece* que no se va a poder terminar de construir un paralelogramo con estas condiciones".

La idea de la conjetura, en términos escolares, es la producción de una "sospecha", de un "parecer", producto de una experiencia de trabajo. Es decir, confluyen en ella exploraciones, ensayos y errores, el uso de los datos conocidos y saberes disponibles que permiten establecer una afirmación con cierto margen de certeza, aunque no es del todo posible, por los recursos utilizados hasta el momento, dar cuenta de que lo afirmado es así y no podría ser de otra manera.

El apartado siguiente propone avanzar de la conjetura a la certeza.

Validación de las conjeturas y de los resultados

Para iniciar el tratamiento de esta cuestión, quizá la más compleja del trabajo matemático escolar, le proponemos resolver la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

a. Intente encontrar argumentos que permitan decidir si la conjetura elaborada en función del problema de la actividad anterior ítem **b.** es verdadera o es falsa. Dicha conjetura sostenía lo siguiente: "parece que no se va a poder terminar de construir un paralelogramo con estas condiciones". (Recordemos que las condiciones eran: un lado de 4 cm y los ángulos adyacentes a él, de 40° y 120°).

b. ¿Será cierto que siempre que se sumen tres números naturales consecutivos el resultado es un múltiplo de 3?

Para tratar algunas cuestiones que nos resultan interesantes para compartir, tomaremos sólo el problema **b.** de la actividad anterior, a modo de ejemplo del tipo de trabajo que estamos intentando explicitar. En su resolución, una vez más, un proceso exploratorio permitirá comprender un poco más de qué se trata el problema. Como se habla de *tres números consecutivos*, es pertinente iniciar el trabajo ensayando con algunos ejemplos para poder analizar los efectos que se producen:

$3 + 4 + 5 = 12$ $\quad$ $20 + 21 + 22 = 63$ $\quad$ $125 + 126 + 127 = 378$

Estos ejemplos, en los cuales se han considerado números de diferentes "tamaños" —y se podría seguir con otros aún mayores—, arrojan resultados que son efectivamente múltiplos de tres. La tentación es sospechar que la suma de tres números consecutivos es siempre un múltiplo de tres. Los ejemplos "muestran" que la conjetura es posible, pero no explican por qué ni permiten tener una certeza de que siempre va a ocurrir así. Una parte fundamental del trabajo matemático involucra la responsabilidad de hacerse cargo, mediante argumentos matemáticos, de los resultados que se obtienen. Es decir, poder encontrar razones que permitan explicar y comprender "por qué pasa lo que pasa" o "por qué se obtiene lo que se obtiene". No es parte del trabajo matemático dejar librado al azar, ni a otro, la determinación de la verdad o la falsedad de lo que se afirma.

Ahora bien, para explicar el hecho de que se obtiene un múltiplo de tres, la representación del problema juega un papel importante. Ni la representación que se elija ni los argumentos que se esbocen serán únicos. Presentamos a continuación dos maneras diferentes de dar cuenta del resultado:

- Al ser tres números consecutivos, siempre es posible imaginar que se le resta 1 al tercero y se le suma 1 al primero, lo que garantiza no cambiar el resultado. De esta manera, se obtiene la suma de tres veces el número del medio, que por ser el triple de un número, es múltiplo de 3. Por ejemplo:
  $1.023 + 1.024 + 1.025 = 1.024 + 1.024 + 1.024 = 3 \times 1.024 = 3.072$,
  que es múltiplo de 3.

Y esto vale para cualquier terna de números consecutivos.

- Al ser tres números consecutivos, podemos llamar al del medio n, luego el anterior será $n-1$ y el siguiente será $n+1$. Su suma resultará $n-1+n+n+1 = 3 \times n$, que es la expresión de un múltiplo de 3.

Es claro que estas dos maneras de dar razones son bien distintas y se apoyan en conocimientos y en modos de representar diferentes. En el primer caso, se recurrió a una representación aritmética, en tanto que en el segundo caso se apeló a una representación algebraica. Pero, en ambos casos, se recurre a argumentos matemáticos que permiten involucrar cualquier terna[5] de números consecutivos, explicando y validando la conjetura planteada.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Se considera el siguiente problema:

- En una bolsa, hay un cuarto kilo de pan. En otra bolsa, hay medio kilo de pan. Si se ubican las dos bolsas en una balanza, ¿cuánto pesarán?

Analice cada una de las siguientes explicaciones de por qué el resultado es $\frac{3}{4}$ e indique diferencias y similitudes.

Explicación 1: Se consigue una balanza de aguja. Se colocan ambas bolsas, y se observa que la aguja llega a $\frac{3}{4}$.

Explicación 2: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

Explicación 3: Como en $\frac{1}{2}$ entran dos de $\frac{1}{4}$, entonces $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ son 3 de $\frac{1}{4}$, es decir, $\frac{3}{4}$.

El trabajo en el aula en torno a la explicación, justificación o validación de los resultados que se obtienen frente a un problema es, quizá, el tema de mayor controversia.

Algunas líneas de trabajo, incluidos varios libros de texto, consideran prioritario el trabajo empírico a la hora de resolver ciertos

[5] Este aspecto se retoma en el siguiente subtítulo "Determinación de un dominio de validez. Generalización".

problemas. Tal es el caso de la explicación 1 que se propone. Es decir, sostienen que el recurso del "material concreto", en este caso la balanza, podría ayudar a los alumnos a entender el resultado 3/4. Este modo de trabajo impregna en los alumnos la idea de que, usando diferentes materiales, es posible responder a las cuestiones que se proponen en el aula. Ahora bien, quien recurre a una explicación como la número 1 no pone en funcionamiento ningún tipo de exploración; no requiere de ningún modo de representación; no apela a recursos matemáticos, como los de las relaciones entre fracciones, la idea de mitad, etc., que son el soporte sobre el cual estamos identificando la actividad matemática. Y más aún, quien recurre a este tipo de material no podría decidir si el resultado es casualidad, o si el resultado debería ser ese y no podría ser otro. No aparece en escena ningún argumento que permita estar seguro de lo que se obtiene.

A esto, podemos agregar el hecho de la imposibilidad de que las medidas sean exactas, no por culpa de los instrumentos que se utilicen, sino debido a que el hecho de medir siempre acarrea un cierto margen de error, ya sea por el ojo que mira, por la bolsa que no pesa justo medio kilo o por la balanza, que podría no funcionar correctamente.

Se transcriben a continuación dos párrafos que apuntan en la misma dirección de lo que se está planteando.

> La Matemática es una disciplina que permite conocer el resultado de algunas experiencias sin necesidad de realizarlas efectivamente; por otro lado, para que la actividad matemática sea realmente anticipatoria de la experiencia, es necesario estar seguro de que esa anticipación fue realizada correctamente; en otras palabras, es necesario validar la anticipación. Construir herramientas que permitan obtener resultados sobre aspectos de la realidad sin necesidad de realizar experiencias efectivas y responsabilizarse matemáticamente por la validez de esos resultados son, desde nuestra perspectiva, dos aspectos ineludibles del quehacer matemático escolar[6].

[6] *Marco General del Diseño Curricular* (2004). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación.

> Debemos considerar como suficientemente comprobada la imposibilidad de determinar, midiéndolos directamente, la mayoría de los tamaños que deseamos conocer. Es este hecho general el que exige la formación de la ciencia matemática. Pues, renunciando, en casi todos los casos, a la medida inmediata de los tamaños, el espíritu humano tuvo que buscar cómo determinarlos indirectamente, y así fue como se vio conducido a la creación de la matemática. La matemática resulta de un ardid, de un sesgo, en el cual la ruta indirecta permite acceder a aquello que no consigue una práctica inmediata[7].

Es decir, cuando se comienza a tratar con cantidades que no pueden ser "manipuladas", no queda otra posibilidad que anticiparse y establecer relaciones que permitan explicar los resultados que se van obteniendo.

Por otro lado, los siguientes párrafos proponen algunos aspectos que vale la pena considerar.

> Una cuestión que ha dado lugar a muchas discusiones en distintos momentos de la enseñanza de la Matemática se refiere al lugar que ocupa —sobre todo, en los primeros grados— la utilización de material concreto para producir resultados o para comprobarlos. Hay distintas maneras de recurrir al uso de este tipo de materiales. Supongamos por ejemplo que, en primer grado, se les propone a los alumnos la siguiente situación: un niño pasa al frente y pone, a la vista de todos, 7 chapitas en una caja; después pasa otro niño y pone, también a la vista de todos, 8 chapitas. Se les pide a los niños que encuentren una manera de saber cuántas chapitas hay en la caja. Utilizando diversas estrategias, los niños arribarán a un resultado. Si, para constatarlo, los niños cuentan las chapitas de la caja, estarán haciendo una comprobación empírica. Si, en cambio, se excluye la posibilidad de acción efectiva sobre los objetos y se pide a los chicos que muestren mediante argumentos que su resultado es correcto, sin corroborarlo empíricamente, estarán haciendo una validación de tipo argumentativo.
> Es necesario señalar que, cuando las comprobaciones son de tipo empírico, es imprescindible proponer la anticipación de los

[7] Serres, M. (1996): *Los orígenes de la geometría*. Bs. As.: Siglo XXI.

resultados que luego se leerán en la comprobación (en la situación de la caja, los niños primero anticipan y luego corroboran). De esta manera, en este juego de anticipación-validación argumentativa-corroboración empírica, los niños irán descubriendo que los resultados que obtienen son una consecuencia necesaria de haber puesto en funcionamiento ciertas herramientas del aparato matemático. Sin esta anticipación, los niños manipulan material, y los resultados que obtienen son producto de una contingencia (se obtuvieron estos, pero podrían haberse obtenido otros). En otras palabras, si no hay articulación entre anticipación y comprobación empírica, esta última se plantea sólo con relación a ella misma; y sus resultados no se integran a ninguna organización de conocimiento específica.

Es necesario señalar que cuando la comprobación es empírica, esa relación de necesariedad entre las acciones realizadas para anticipar y los resultados leídos en la corroboración no puede independizarse del contexto particular en el que se desarrolló. ¿Resulta esta afirmación un argumento para descartar las comprobaciones empíricas? De ninguna manera hacemos esa aseveración. Las comprobaciones de tipo experimental hacen posible una interacción entre los modelos matemáticos que los niños van elaborando y los aspectos de la realidad que son modelizables a través de las herramientas matemáticas. Sin esta interacción, los niños no tendrían posibilidad de hacer funcionar esos modelos, de ponerlos a prueba. Concluimos entonces que, cuando las constataciones empíricas se plantean como una verificación de aquello que se ha anticipado, se empieza a hacer observable la potencia de la matemática como herramienta que permite anticipar los resultados de experiencias no realizadas[8].

Otro aspecto que nos parece interesante tratar se vincula con las posibilidades que tienen —o no— los alumnos de nuestras escuelas para "entrar en este juego". En ese sentido, circulan varias interpretaciones.

... Por un lado, la interpretación biológica que hoy se adorna de argumentos con pretensiones genéticas, pero retoma de hecho el discurso sobre la inteligencia que tenía Platón hace veinticinco siglos: las matemáticas están dadas a quienes tienen un don, una

[8] *Marco General del Diseño Curricular* (2004): óp. cit.

capacidad de abstracción suficiente para percibir los contenidos conceptuales que les son propuestos —lo que la frenología llamaba hace casi un siglo y medio, "la joroba de los matemáticos"—. La segunda interpretación propuesta por la sociología de la educación explica que algunos niños padecen de discapacidades socioculturales, que carecen del capital cultural necesario para manejar un lenguaje abstracto y acceder así al universo matemático.

Estas dos tesis, una biogenética y la otra sociocultural, son muy diferentes pero parten de un postulado común: los conceptos, los conocimientos, las culturas están consideradas como dadas y se transmiten a los herederos bajo la forma de don natural o capital sociocultural.

A esta idea de una matemática dada, bajo una u otra forma, contrapongo la idea de una matemática construida, diría incluso, utilizando de una manera un poco provocativa el vocabulario de la técnica, una matemática fabricada. La actividad matemática no es mirar y descubrir: es crear, producir, fabricar. Los conceptos matemáticos no son un bien cultural trasmitido hereditariamente como un don o socialmente como un capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento, el trabajo de los matemáticos a través de la historia, el del niño a través de su aprendizaje. El Don y el Capital de un lado, el Trabajo del otro: empleo estos términos intencionalmente para que se pueda comprender mejor cuál es el problema de fondo planteado por la democratización de la enseñanza de la Matemática. Esta democratización implica una ruptura que no recurre al ámbito de las aptitudes naturales o del entorno sociocultural en un sentido vago del término, sino que es una ruptura social en el seno de las prácticas mismas de enseñanza. Hacer matemática no consiste en una actividad que permita a un pequeño grupo de elegidos por la naturaleza o por la cultura el acceso a un mundo muy particular por su abstracción. Hacer matemática es un trabajo del pensamiento, que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran sin cesar. Democratizar la enseñanza de la Matemática supone en principio que se rompa con una concepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y que sólo sería accesible a algunos y que se piense, en cambio, la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos...[9]

A continuación, proponemos otro tipo de tarea que se desarrolla hacia el interior del trabajo matemático.

Determinación de un dominio de validez. Generalización

Una parte del trabajo matemático involucra la producción de propiedades, algunas pueden ser reconocidas y hasta designarse como *teoremas* o *corolarios*. En ellas, los enunciados o las relaciones que se establecen adquieren un carácter general, lo que determina para tal fin un dominio de validez. Es decir, se explicitan las condiciones a partir de las cuales una colección de objetos matemáticos (los *triángulos rectángulos*, por ejemplo) cumplen una cierta propiedad o relación. Por ejemplo, el enunciado del Teorema de Pitágoras: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". En esta afirmación, se establece un dominio de validez: todos los *triángulos rectángulos* —y no, todos los triángulos—.

Por otro lado, esas condiciones adquieren un cierto nivel de convencionalidad en la formulación, apelando a un vocabulario mínimo necesario para poder socializarlas. Por ejemplo, $a^2 + b^2 = d^2$, siendo a y b los catetos; y d, la hipotenusa.

Le proponemos, ahora, desarrollar la siguiente actividad, que apunta en el sentido de lo antedicho:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Resuelva los siguientes problemas intentando hacer explícitas las cuestiones que tuvo en cuenta para encontrar, establecer o producir las condiciones o un dominio de validez.

[9] Charlot, B. (1986): *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de la Matemática*, conferencia dictada en Cannes.

Problema 1:

Sea ABC un triángulo. Se dibuja una recta que contenga el lado AC, y se marcan dos puntos P y Q de manera tal que $\overline{PC} = \overline{AQ}$ y que A quede entre Q y C, mientras que C queda entre P y A. ¿Cuáles son las condiciones para que el triángulo QBP sea isósceles?[10]

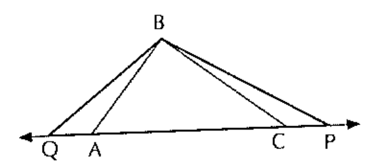
Problema 2:

La expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones puede ser escrita con "dos cifras después de la coma": $\frac{7}{4}$; $\frac{37}{20}$; $\frac{48}{25}$.

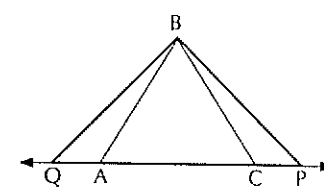
Escriba cuatro fracciones cuya expresión decimal pueda ser escrita con "dos cifras después de la coma".

¿Qué características deberá tener una fracción para que su expresión decimal pueda ser escrita con "dos cifras después de la coma"?

Para resolver el problema **1** de la actividad anterior, un punto de partida posible es la construcción de figuras de análisis que permitan comprender un poco más de qué se trata. Si el dibujo que se realiza es como el siguiente:



resulta claro que, sin ningún tipo de información más allá del dibujo, no es posible garantizar que el triángulo QBP sea isósceles (dejamos esta tarea al lector). Sin embargo, es posible vislumbrar una conjetura: si el triángulo ABC es isósceles, parecería ser que el triángulo QBP también lo es.



[10] Itzcovich, Horacio (2005): *Introducción al estudio didáctico de la Geometría, de las construcciones a las demostraciones*. Bs. As.: Libros del zorzal.

Dejamos al lector la tarea de demostrar que si ABC es isósceles, el triángulo QBP también lo es.

Pero hay que considerar también que el triángulo ABC debe tener, en B, el vértice donde confluyen los lados iguales. Caso contrario, podría no verificarse que se cumpla la condición tratada.

Este trabajo permite retomar el enunciado del problema 1 y convertirlo en la siguiente afirmación: "Si un triángulo ABC es isósceles, con $\overline{AB} = \overline{BC}$, se dibuja una recta que contenga el lado AC, se marcan dos puntos P y Q de manera tal que $\overline{PC} = \overline{AQ}$ y que A quede entre Q y C, mientras que C queda entre P y A, entonces el triángulo QBP también es isósceles".

Es decir, se han analizado y establecido cuáles son las condiciones para que se verifique una propiedad. Este tipo de tarea también forma parte de la actividad matemática.

El problema **2** de la actividad anterior apunta en la misma dirección. Es decir, finalmente se trata de encontrar cuáles son las condiciones que debe cumplir una fracción para que pueda ser representada con una expresión decimal que incluya hasta los centésimos. Y recordemos que, para que una fracción cumpla con estas condiciones, será necesario que dicha fracción sea equivalente a alguna con denominador 100.

Se trata, entonces, de un trabajo que involucra la posibilidad de producir relaciones que se cumplen cuando se verifican ciertas condiciones. Y el estudio es precisamente la búsqueda de tales condiciones.

La construcción de un modelo

Numerosos autores (Chevallard, 1989; Gascón, 2000; Sadovsky, 2005) identifican la actividad matemática como una actividad de modelización. O sea:

> ... muy sucintamente, podemos decir que un proceso de modelización supone, en primer lugar, recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir —o utilizar— relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia[11].

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Le proponemos que resuelva el siguiente problema, intentando identificar aquellas tareas que despliegan y que puedan asociarse, de alguna manera, con la idea de modelización.

Problema:

a. Se sabe que, con 3 sobres de jugo, alcanza para preparar bebida para 10 personas. ¿Cómo se podrá hacer para saber cuántas personas pueden tomar con 6, 9 y 12 sobres de jugo?

b. Al cambiar de marca, se conoce que, con 3 sobres para jugo, se prepara bebida para 15 personas. ¿Cuántas personas podrán tomar con 7, 11 y 14 sobres?

c. Una tercera marca permite saber que, con 4 sobres, alcanza para preparar jugo para 10 personas. ¿Cuántas personas podrán tomar con 10 y con 14 sobres?

Una de las cuestiones que están presentes en este problema es la idea de variables. Si bien, en este caso, las variables "vienen" con el problema (sobres de jugo y personas que beben) y no deben ser seleccionadas, el tratamiento de ellas y la elaboración de relaciones entre ellas es parte del trabajo que plantea el enunciado de cada ítem.

Por otro lado, hay un aspecto vinculado con el trabajo de modelización que no ha sido aún mencionado en este apartado, aunque sí anteriormente: la elección de un modo de representación que favorezca el abordaje del problema. En este caso, las tablas de valores podrían ser una representación fértil para su tratamiento.

[11] Sadovsky, P. (2005): óp. cit.

Para el punto *a*.

Cantidad de sobres de jugo	3	6	9	12
Cantidad de personas que pueden beber	10			

Para el punto *b*.

Cantidad de sobres de jugo	3	7	11	14
Cantidad de personas que pueden beber	15			

Para el punto *c*.

Cantidad de sobres de jugo	4	6	10	14
Cantidad de personas que pueden beber	10			

Seguramente, el lector reconocerá que la proporcionalidad resulta un modelo pertinente para resolver este problema, en este caso, completando las tablas.

Para completar la tabla correspondiente al punto **a.**, es posible recurrir a propiedades válidas en el modelo: es decir, al doble de cantidad de sobres, el doble de personas; al triple, el triple, etcétera.

Para la tabla del punto **b.**, al no poder pensar del mismo modo que para el punto **a.**, se abre la posibilidad de identificar la constante de proporcionalidad: todos los valores correspondientes a la cantidad de sobres, al ser multiplicados por 5, permiten conocer la cantidad de personas que pueden tomar jugo.

En tanto que para el punto **c.**, como con 4 sobres toman 10 personas, con 2 sobres, alcanzará para 5 personas. De allí se podrá identificar que, con 6 sobres, pueden beber 15 personas:

Cantidad de sobres de jugo	4	2	6	10	14
Cantidad de personas que pueden beber	10	5	15		

Evidentemente, algunas de estas relaciones entre las variables pueden ser conocidas y utilizadas, en tanto que otras deberán ser interrogadas o producidas.

En este primer capítulo, hemos tratado de explicitar algunos aspectos del trabajo matemático que nos parecen fundamentales para pensar la enseñanza de esta disciplina. Si este es el modo en que concebimos la actividad matemática, es esperable que él pueda desarrollarse en las clases de Matemática, de manera tal que los alumnos tengan la oportunidad de aproximarse y, por qué no, de apropiarse, no sólo de ciertos conocimientos matemáticos, sino también, del modo en que se trabaja para producirlos.

CAPÍTULO 2

Los números naturales y el sistema de numeración

La intención de este capítulo es compartir con el lector un enfoque para la enseñanza del sistema de numeración y de las operaciones. A partir de los aportes de las investigaciones recientes sobre la apropiación de estos contenidos por parte de los alumnos, se contempla la complejidad de este aprendizaje, y se proponen aproximaciones sucesivas. Así, se propician variadas y cada vez más profundas relaciones entre los números, que posibilitan la comprensión del sistema posicional-decimal y la utilización de estos conocimientos en problemas y en cálculos.

El sistema de numeración: convenciones y complejidades

El hecho de que el sistema de numeración sea un conocimiento que utilizamos permanentemente, a veces, nos hace perder de vista la complejidad que encierra su funcionamiento y las dificultades que, en consecuencia, pueden encontrar aquellos que están intentando aprender este objeto matemático.

Nuestro sistema de numeración es una creación cultural con características propias, que difieren de las de otros sistemas pertenecientes a otras culturas. Como cualquier objeto de construcción cultural, es una convención y, como tal, arbitraria; por lo tanto, la posibilidad de que este sistema pueda ser aprendido por las nuevas generaciones depende de la enseñanza.

Los diversos enfoques para enseñar nuestro sistema de numeración dan cuenta de variados esfuerzos que la escuela ha producido para intentar disminuir esa complejidad y hacerlo, así, asequible para los alumnos de grados bajos. En algunos de esos intentos, se oscila entre una banalización y una naturalización del objeto. Es decir, se lo transforma banalizándolo como si no fuera complejo y, al mismo tiempo, se lo trata como si su apropiación fuera natural o espontánea. Las reglas del sistema de numeración, lejos de ser "naturales", son producto de la elaboración de un conjunto de convenciones que demandaron siglos para que los seres humanos las construyeran.

Por otra parte —y como veremos más adelante—, desde muy chicos, los niños poseen conceptualizaciones acerca del sistema. El gran desafío para la enseñanza es lograr vincular tales conceptualizaciones de los niños con los saberes considerados válidos. El problema didáctico al que se enfrentan los docentes, entonces, es lograr enseñar un objeto complejo produciendo argumentaciones al nivel del conocimiento de los alumnos. Para esto, los maestros deben realizar una reconstrucción de ese objeto que lo haga apropiable por los que aún no disponen del conocimiento acabado en el momento en el que tienen que estudiarlo. Esto hace necesario "desnaturalizar" nuestro saber adulto sobre las reglas que rigen nuestro sistema, de modo de no pensarlas como si sólo conformaran una técnica de traducción de las cantidades a una versión gráfica, para la que únicamente hay que aprender las reglas que regulan esa traducción.

Dijimos que tal reconstrucción se elabora teniendo en cuenta los conocimientos disponibles de los alumnos como punto de partida. Si se quiere que los alumnos hagan matemática, entonces habrá que respetar esos conocimientos y, al mismo tiempo, reconocer su carácter provisorio. Cuando, en el Segundo Ciclo, los alumnos aborden el estudio de los números racionales, descubrirán que las relaciones y las propiedades aprendidas a propósito del estudio de los naturales no son adecuadas para comprender el funcionamiento de este nuevo campo numérico. Esa revisión de lo "viejo" a partir del aprendizaje de lo nuevo permitirá la resignificación de los números naturales y la construcción con sentido de los números racionales.

Las reglas y las características de nuestro sistema de numeración

Para poder pensar en una enseñanza con las características descriptas, es necesario definir en qué sentido afirmamos que nuestro sistema de numeración es complejo. Para eso, detallamos sus características principales:

1. El sistema está compuesto de 10 signos que, combinados entre sí, pueden representar cualquier número.
2. Es un sistema decimal porque está organizado en base 10, es decir, que cada unidad de un orden equivale a 10 unidades del orden anterior.

4 dec = 40 U
1 centena = 10 d

3. Además, es un sistema posicional, porque la misma cifra adquiere diferente valor según la posición que ocupe en un número; por ejemplo, la cifra 7 vale diferente en 7, 70, 700, etc. Esta organización procura una enorme economía tanto para anotar o para leer los números, como también, para operar con ellos.
4. Se escribe en un orden decreciente de izquierda a derecha: las cifras que representan cantidades mayores, a la izquierda; y las menores, a la derecha.
5. Incluye el cero.
6. Entre dos números de la misma cantidad de cifras, es mayor el que tiene a la izquierda el número mayor.
7. Entre dos números de diferente cantidad de cifras, es mayor el que tiene más cifras.

Por su organización decimal, el valor de cada posición, de derecha a izquierda, corresponde a las potencias sucesivas de 10. Así, los valores de las posiciones consecutivas son los siguientes:

... 10^4; 10^3; 10^2; 10^1; 10^0.

Es decir:

... 10.000; 1.000 ; 100; 10; 1.

Cada cifra de un número corresponde, entonces, al coeficiente por el cual se multiplica dicha potencia de la base. Por ejemplo, para 2.487, el valor de cada una de sus cifras sería el siguiente:

$2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

Es decir:

2 x 1.000 + 4 x 100 + 8 x 10 + 7 x 1= 2.000 + 400 + 80 + 7

Como vemos, la forma gráfica con la que se representa la numeración (2.487) expresa sólo una parte de todo lo que está significado por el número, tal como este se interpreta dentro del sistema de numeración. La numeración escrita es hermética, "opaca", ya que las potencias de la base no se representan a través de símbolos particulares, sino que queda a cargo del sujeto el inferirlas a partir de la posición que ocupan las cifras.

El problema didáctico consiste en encontrar las situaciones adecuadas para explicitar estas reglas a los niños, a pesar de que las escrituras numéricas, en tanto herméticas y opacas, las ocultan.

En cambio, la numeración hablada tiene otras características. Al enunciar un número, se explicita la descomposición aditiva y/o multiplicativa de los números. Esto es así porque, a diferencia de la numeración escrita, la numeración hablada no es posicional. Si lo fuera, la denominación oral del número 4.372 sería "cuatro tres siete dos", en cambio lo leemos cuatro *mil* tres*cientos* se*tenta* y dos; es decir que, al mismo tiempo que enunciamos la cifra, enunciamos la potencia de 10 que le corresponde a cada cifra.

Esta característica de la numeración hablada hace que la enunciación de un número suponga siempre una operación aritmética.

> En la numeración hablada, la yuxtaposición de palabras supone siempre una operación aritmética, operación que, en algunos casos, es una suma (mil cuatro significa 1000 + 4, por ejemplo), y en otros, una multiplicación (ochocientos significa 8 x 100, por ejemplo). En la denominación de un número, estas dos operaciones aparecen en general combinadas (por ejemplo, cinco mil cuatrocientos significa 5 x 1000 + 4 x 100) y —como para complicarle la existencia a quien intente comprender el sistema— un simple cambio en el orden de enunciación de las palabras indica que ha cambiado la operación aritmética involucrada: cinco mil (5 x 1000) y mil cinco (1000 + 5), seiscientos (6 x 100) y ciento seis (100 + 6)[1].

[1] Lerner, D., P. Sadovsky y S. Wolman (1994): "El sistema de numeración: un problema didáctico" en C. Parra e I. Saiz (comps.): *Didáctica de las Matemáticas*. Bs. As.: Paidós.

A estas complejidades, hay que sumarles que la conjunción "y", que representa lingüísticamente la adición, sólo aparece cuando se trata de reunir decenas y unidades, y no se presenta en la reunión de centenas y unidades (por ejemplo, decimos "treinta y cuatro", pero no decimos "trescientos y cuatro"). En realidad, aparece en la reunión de algunas decenas y unidades. Decimos, "cincuenta y ocho", pero también decimos "once, doce, trece, catorce, quince". Estos números no expresan en la numeración hablada la característica de que son números de 2 cifras, "suenan" igual que si decimos "siete, uno, nueve, cuatro". No hay nada en las palabras que permita darse cuenta de cuáles son números de una cifra y cuáles son números de dos cifras.

Otros obstáculos a los que se enfrentan quienes están tratando de entender el sistema tienen que ver con otros tipos de inconsistencias, como por ejemplo, las siguientes:

- Decimos "veintiuno, treinta y uno, cuarenta y uno", etc., es decir, que enunciamos la decena entera y la unidad extra. En cambio, decimos "once".
- Cuando decimos "doce, trece", lo que suena primero es el "dos" y el "tres", razón por la que muchos chicos escriben esos números como 21 y 31. En cambio, a partir del treinta, todas las decenas dan cuenta de la cifra con la que comienzan al denominarlas, lo que aporta una información sumamente importante para poder aprender a leer y escribir números: "Este número (refiriéndose al 47) empieza con el cuatro, así que tiene que ser cua... cua... ¡cuarenta! Cuarenta y siete", argumentó Mercedes de 6 años y 4 meses[2].

Es interesante reflexionar, ahora, sobre uno de los supuestos que se encuentran más arraigados en la enseñanza y que sugiere trabajar en el inicio de Primer grado con pocos números, por ejemplo, con un intervalo numérico que no supere el 20. Como vimos, justamente esos son los números que ofrecen mayor dificultad, por ser los que menor información brindan a través de la numeración hablada, en donde los chicos se apoyan al principio para poder interpretarlos y escribirlos. Más adelante, retomaremos esta cuestión a propósito del análisis de las situaciones de enseñanza. Este supuesto persigue la intención de dis-

[2] En adelante, se emplearán las abreviaturas "a." y "m." para indicar la edad en año y en meses.

minuir la complejidad de este objeto matemático y hacerlo así más fácilmente apropiable para los alumnos de grados bajos.

Otro de los diversos enfoques que persiguen el mismo fin está referido a centrar la enseñanza en el uso de material concreto o material estructurado. Desde esta postura, se utilizan "bolsas" de 100 fósforos, "ataditos" de 10 fósforos, fósforos sueltos; o regletas de diferentes colores de acuerdo con las distintas longitudes; o cuadrados con 100 cuadraditos, tiras de 10 cuadraditos y cuadraditos sueltos, etc. También suelen usarse como material didáctico representaciones gráficas que equivalen a 100, 10 y 1; por ejemplo: cuadrados, triángulos y círculos, etcétera.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

a. Realice un punteo de las características del funcionamiento de cada uno de estos recursos didácticos utilizando las categorías que utilizamos para nuestro sistema de numeración (cantidad de símbolos utilizados, posibilidad de representar infinitos números naturales, base en la que están organizados, necesidad del cero, función del lugar que ocupan los símbolos, relación entre la cantidad de símbolos y el valor del número representado...).

b. Establezca semejanzas y diferencias entre las características de estas representaciones concretas y las de nuestro sistema de numeración.

Como habrá podido notar, existen diferencias importantes entre esos recursos de enseñanza y nuestro sistema de numeración.

En primer lugar, estas representaciones tienen sólo tres signos en base decimal, cada uno representa un orden de agrupamiento: un signo para representar las unidades, otro para las decenas y un tercero para las centenas. Podrían agregarse otros símbolos para la unidad de mil, decena de mil, etc., pero siempre se trataría de una cantidad limitada; es decir, no habilita a escribir infinitos números posibles.

En segundo lugar, en realidad, no son posicionales, es decir que la ubicación de los símbolos no modifica su valor. Por ejemplo, que 2 ataditos de 10 elementos estén primero, 5 elementos sueltos a continuación y, por último, una bolsa de 100 elementos no modifica en absoluto que esa representación equivalga al número 125. En cambio, en nuestro sistema, realizar esas modificaciones en la posición de los números determinaría el cambio en ese número, que se transformaría en el 251.

En tercer lugar, no son mixtos (multiplicativos y aditivos). Son sólo aditivos. Se van agregando uno al lado del otro (sin ningún orden en particular) los signos correspondientes, repitiéndolos tantas veces como si dicha cantidad estuviese comprendida en dicho número y, luego, se suman para obtener el valor total.

En cuarto lugar, no incluyen un símbolo para el cero. Basta con no incluir la representación de la cantidad ausente.

En quinto lugar, entre dos representaciones con la misma cantidad de símbolos, no se verifica que sea mayor la que tiene a la izquierda el símbolo mayor. Al no ser posicional, la ubicación no es relevante.

Por último, no se verifica que, entre dos representaciones de diferente cantidad de símbolos, sea mayor la que tiene más símbolos. Para representar el número 9, se necesitan 9 fósforos; y para representar 100, sólo hace falta una bolsa.

En síntesis, estos recursos que buscan "concretizar" las reglas del sistema de numeración presentan la paradoja de no respetarlas. Probablemente, están basadas en concepciones que sostienen que se aprende por observación y manipulación y que, para favorecer los aprendizajes, hay que pasar de lo concreto a lo abstracto.

¿Qué es más abstracto? ¿Manipular representaciones que sólo "viven" en la escuela? ¿O utilizar los números con los que los alumnos y la sociedad interactúan constantemente?

El sistema de numeración y las operaciones

Otra ventaja de la numeración escrita es que, gracias a sus características, posibilita la construcción de diferentes y económicos recursos de cálculo algorítmico y mental.

En los algoritmos convencionales de suma y resta, para resolver las operaciones, se opera sobre todas las cifras como si fueran unidades (cuidando siempre de sumar o restar entre sí las del mismo orden), sin necesidad de considerar momentáneamente su posición. Por ejemplo, al sumar 724 + 87, se suma 2 + 8 + 1 (del reagrupamiento de 4 + 7), sin tener que pensarlo como 20 + 80 + 10, porque su lugar en la escritura garantiza —para quien disponga de ese conocimiento— que quedará en el lugar de las decenas. Es decir, únicamente el haber construido un conjunto de relaciones que permita comprender el significado de los números y de las transformaciones que se operan sobre ellos a través de esos cálculos permite controlar que se está sumando "como si" fueran 2 y 8, pero en realidad son 20 y 80, porque el resultado de 2 + 8 está relacionado con el de 20 + 80, etcétera.

Dependiendo del tipo de enseñanza que se lleve adelante, las operaciones y el sistema de numeración se trabajarán por separado, como si no existiera ninguna relación entre ellos; o se planteará intencionalmente una enseñanza donde queden explicitadas todas las relaciones que los unen. Si se eligiera la primera opción, es posible obtener como consecuencia, que los alumnos no dispongan de respuestas cuando se los interrogue sobre cuestiones internas, por ejemplo: ¿Por qué, al sumar 16 + 18 no puede dar veinti...? ¿Por qué, cuando sumamos o restamos, hay que encolumnar los números de derecha a izquierda? ¿Por qué nos "llevamos" o le "pedimos" al de al lado?

Las razones por las que funcionan así esas reglas de los algoritmos se derivan de las propiedades del sistema de numeración: encolumnamos, porque es un sistema posicional; reagrupamos, porque es de base diez y, por lo tanto, no puede haber nada que supere los 9 elementos en cada potencia de la base; operamos de derecha a izquierda, para lograr economía al reagrupar.

Otro ejemplo que nos permite tomar contacto con esta problemática es el algoritmo de la multiplicación por dos cifras. Si les preguntamos a alumnos de Segundo Ciclo acerca de las razones por las que es preciso desplazar el segundo producto un lugar a la izquierda, en muchos casos, nos encontraremos con que muchos contestan: "No sé, la maestra me dijo"; "A mí me lo enseñaron así". A eso, llamamos *contestar desde la fe.*

Es un problema de la enseñanza, y no necesariamente del aprendizaje, el que estos alumnos no puedan disponer del conocimiento

que les permitiría argumentar que, como están multiplicando por una decena, nunca podrían obtener como resultado una unidad. Y no sólo eso, también esperamos que puedan extender ese conocimiento y reutilizarlo para poder argumentar entonces, que, si se multiplica por un número de tres cifras, se tendrá que correr el tercer producto hasta el lugar de las centenas, etcétera.

Dominar las características del sistema de numeración posicional decimal permite anticipar resultados de cálculos sin necesidad de hacerlos, así como controlar que los resultados obtenidos sean pertinentes.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

1. Encuentre, en cada caso, el valor del cociente y del resto, sin hacer la cuenta:

   a. 19.561 ÷ 10   b. 19.561 ÷ 100   c. 19.561 ÷ 1.000

2. ¿Se podrá conocer el cociente y el resto de esta cuenta sin resolverla?

   19.561 ÷ 8

Probablemente, quien no domine todas las características del sistema de numeración no identificará las relaciones que hay entre nuestro sistema y la división o la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Pero algunos ensayos podrán dar pistas. Por ejemplo, al realizar:

$$\begin{array}{r|l} 19.561 & 10 \\ \hline 1 & 1.956 \end{array}$$

Es decir, se trata de reconocer que 1.956 x 10 = 19.560, por lo tanto, el resto será 1. Y al realizar 19.561 ÷ 1.000, los números "señalan" que el cociente será 19 (pues 19 x 1.000 = 19.000); y el resto deberá ser 561.

La cuestión central en la enseñanza de la Matemática, entonces, es cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para los alumnos. Ese *sentido* se refiere, entre otras cosas, a que puedan argumentar, utilizando para ello su conocimiento matemático, acerca de las razones por las que aplican determinadas reglas, procedimientos, etc. De otro modo, el aprendizaje termina por convertirse en un "acto de fe": hay que realizar procedimientos porque el maestro lo pide, tal y como lo pide.

Resumiendo, en cuanto a la numeración escrita, al mismo tiempo que procura una gran economía por ser absolutamente regular, esconde toda la información acerca de su organización: cuál es el valor de cada cifra de un número escrito según la posición que ocupe. Ese valor, como vimos, depende de operaciones de multiplicación (por potencias de 10) y de suma (de los valores correspondientes a cada cifra). Es lo que vuelve a nuestros números tan económicos, pero a su vez, nada transparentes y, por lo tanto, complejos de comprender por quienes se acercan inicialmente a ellos. En cuanto a la numeración hablada, al no ser posicional, brinda informaciones en las que se apoyan los niños para producir escrituras e interpretarlas. Al tener ciertas irregularidades, presenta algunos obstáculos que es necesario prever didácticamente.

Veamos ahora cómo utilizan los niños la numeración hablada para avanzar en el dominio de la numeración escrita y cuáles son las concepciones que construyen para avanzar en el conocimiento del sistema de numeración.

Concepciones de los chicos acerca del sistema de numeración y de su representación escrita

La investigación que Delia Lerner, Patricia Sadovsky y Susana Wolman (1994) realizaron en la Argentina acerca de cómo se aproximan los chicos al conocimiento del sistema de numeración arrojó dos certezas.

a. Los chicos construyen muy tempranamente ideas particulares para producir, interpretar y comparar representaciones numéricas[3].

[3] Ressia de Moreno, B. (2003): "La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel inicial y en el primer año de la EGB", en Mabel Panizza (comp.) (2003).

En general, ya desde el Nivel Inicial, los niños pueden establecer comparaciones entre números y formular argumentos para dar prueba de sus concepciones. Por ejemplo, Mercedes (5 a. 2 m.), al tener que comparar y decidir cuál de los siguientes números es más grande entre 367 y 57, dice "Este (señalando al 367), porque tiene más números". A pesar de que Mercedes no puede aún leer esos números, "sabe" que, a mayor cantidad de cifras, es mayor el número.

A veces, este criterio es inestable cuando se trata de comparar números con gran diferencia en sus valores absolutos, es decir que no se generaliza de manera inmediata en todos los casos. Los niños pueden guiarse por los valores absolutos de las cifras, en lugar de tomar como referencia la cantidad de cifras, por ejemplo, al comparar 97 y 101, sostener, utilizando como criterio el valor absoluto de las cifras, que el primero es mayor porque "nueve y siete son más grandes que uno y cero".

Frente al pedido de comparación de dos números de igual cantidad de cifras, 34 y 78, Julián (5 a. 8 m.) argumenta "Es más grande este (señalando el 78), porque el 7 es más grande que el 3 y, si el primero es más grande, todo el número es más grande". A pesar de no saber leerlos, puede argumentar poniendo en juego su hipótesis acerca de que los números "valen" diferente en función del lugar que ocupen. Ese argumento está ligado al conocimiento y a la información que brinda la numeración hablada: Julián sabe que el primer número corresponde a los "veinti", "treinti", "setenti", etc., y que, por lo tanto, son mayores que los "dos", "tres", "siete" etc. En otros casos, las argumentaciones que ofrecen los niños están más ligadas al orden de enunciación de la serie numérica oral: Sebastián (5 a. 9 m.), por ejemplo, explica que "el 41 es más grande que el 14 porque, si contás, decís 1, 2, 3 (...), 14, 15 (...), 19, 20, y tenés que seguir contando un montón hasta llegar al 41, está después y por eso es más grande".

Cuando los números que se deben comparar tienen la primera cifra igual (por ejemplo, 241 y 273), muchos chicos argumentan que "entonces hay que mirar el segundo número".

También en estos casos, a veces, los niños pueden guiarse por la diferencia de valores absolutos, en lugar de recurrir a este criterio. Por ejemplo, si tuvieran que comparar 49 y 51, algunos podrían sostener que el primero es mayor. Obtienen estas ideas a partir de las interacciones que realizan permanentemente con un medio repleto de portadores numéricos.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Realice un punteo de diferentes contextos en los que aparezca información numérica.

Como el lector habrá comprobado, hay una enorme profusión de escrituras numéricas con las que interactuamos todos los días. ¿Qué uso didáctico les damos a los diferentes portadores? ¿Se propician en el aula comparaciones y discusiones acerca de los distintos sentidos que tiene un número, ya sea que indique un precio, el vencimiento de un remedio, la altura de una calle, la cantidad de trigo, el turno en un negocio, el canal de TV, el día en el calendario, la edad de una persona, el horario de clases, el número de colectivo, la patente de un auto, el lugar de un libro en la biblioteca, entre otros?

Por otra parte, esas escrituras con las que los niños interactúan, a las que intentan interpretar, que producen, comparan, etcétera, no están conformadas sólo por números de una cifra. Sin embargo, muchas veces en la escuela, en los inicios de Primer grado, sólo se trabaja con los números del 1 al 9. En ese caso, ¿cómo pueden usar lo que saben? ¿Cómo construyen y explicitan que "si tiene más números, entonces es más grande", si no pueden comparar números de diferentes cantidades de cifras? ¿Cómo podrían vincular sus conocimientos sobre la numeración hablada con la escrita para argumentar (a su manera) que el valor de un número depende de la posición que ocupe, si solamente comparan números de una cifra?

b. Los chicos construyen la escritura convencional de los números sin seguir tal cual el orden de la serie numérica.

Es decir, no aprenden primero el 1, después el 2, 3 (...) 9, 10, 11 (...),19, 20, 21, etc. Hay ciertos números que son privilegiados; y estos son los números "redondos" o los "nudos", es decir, las decenas enteras, las centenas enteras, etc. En general, primero, pueden escribir números vinculados a la potencia de la base, como el 10, 100, 1.000, etc.; luego, y apoyándose en esas escrituras, aprenden la escritura de números, como el 20, 30, 200, 400, etc. Posteriormente, acceden a la escritura convencional de los intervalos entre esos nudos.

La construcción de las diferentes escrituras depende, en parte, de las posibilidades que tengan los chicos de interactuar con números escritos. En este sentido, y como veremos más adelante, es sumamente importante la presencia en las aulas de diferentes portadores de información numérica, como cuadros de números, bandas numéricas, cintas métricas, libros de muchas páginas, entre otros.

Además del conocimiento que tengan los chicos de la escritura de algunos números y de las informaciones de los diferentes portadores, será también relevante toda la información que pueda aportar el docente sobre los números y su representación. Todo eso servirá de base para leer o anotar números nuevos. Por otra parte, los avances en dicha construcción se dan a partir de que los alumnos utilizan dos informaciones: la que extraen de la numeración hablada y la que les da el conocimiento de la escritura convencional de los nudos.

El criterio que prima es que los números se escriben tal cual se dicen. De esta manera, yuxtaponen los símbolos que conocen según el orden que les indica la numeración hablada. Por ejemplo, al pedirle a Julián (6 a. 1 m.) que escriba "dieciocho", escribe 108; "veintisiete" lo escribe 207; "trescientos cuarenta y seis" como 300406; "cuatro mil trescientos" como 4000300 (otros chicos lo escriben como 41000300).

Estas concepciones avanzan hacia la escritura convencional al entrar en conflicto dos de las hipótesis fuertes de las que disponen: por un lado, el convencimiento de que los números se escriben tal cual se dicen; y por otro, el conocimiento de que un número es mayor que otro si tiene más cifras.

Dependerá del tipo de números que se les pida que escriban para que estos conflictos surjan o no. Por ejemplo, al dictarle "treinta y ocho", Joaquín (6 a. 3 m.) escribe 308 y argumenta con total convicción que está bien escrito, aunque 30 se escriba sólo con dos cifras, porque "treinta y ocho es más grande que treinta". Al pedirle, a continuación, que escriba "ochenta", ese argumento pierde validez, ya que sabe que 80 es mayor que 38 (porque empieza con 8) y por lo tanto, no puede tener menos cifras. Joaquín se encuentra frente a un tipo de problema que, si bien todavía no puede resolver, permitirá que progresivamente revise sus ideas acerca de que, para escribir números, sólo hace falta escuchar cómo se dicen.

¿Qué tipo de condiciones didácticas habría que generar para que estos conocimientos se construyeran?

Será necesario ofrecerles a los alumnos diversas situaciones en las que tengan que comparar, ordenar, leer y escribir números en distintos intervalos numéricos. Se trata de favorecer el uso y el estudio de la serie numérica mediante la identificación de regularidades en la serie oral y en la serie escrita.

De este modo y progresivamente, irán construyendo ideas acerca de que los "diecis", "veintis", "treintis", etc., "van con dos números"; "los cientos van con tres"; "los miles van con cuatro". Estos conocimientos funcionan como control de escrituras ligadas a la numeración hablada: "Son muchos números" se les escucha decir, y se embarcan en reiterados intentos de modificar la escritura hasta lograr reducir la cantidad de cifras (Lerner, Sadovsky, Wolman, ob. cit.).

Acerca de las propuestas de enseñanza de los números

A partir del análisis de algunas propuestas de enseñanza desarrollado precedentemente, es posible suponer que los actos relativos a la enseñanza involucran adoptar, de manera implícita o explícita, algunas ideas asociadas a los modos en que se concibe que aprenden los niños. Estas ideas, seguramente, condicionen las decisiones didácticas que se adopten, las actividades que se seleccionen, la manera en que se las haga funcionar en el aula, etcétera.

Las siguientes son algunas marcas de la concepción de aprendizaje a la cual adherimos.

Adoptamos las ideas de Brousseau (1986), quien define su concepción de aprendizaje de la siguiente manera: "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este

saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (...)".

Estos desequilibrios, a los que se refiere Brousseau, se producen si existe una situación que el alumno tenga que resolver, pero además, si dispone de algunos conocimientos de base para enfrentar el problema, los que, al mismo tiempo, le resulten insuficientes como para resolverlo en forma acabada.

Es decir, el aprendizaje no se realiza exclusivamente por el registro de los datos observables ni tampoco por estar el conocimiento preelaborado (estructuras innatas). Siempre requiere de una interacción sujeto-medio que dé cuenta de ciertas formas de organización de los hechos, una cierta lógica por parte del sujeto. En este sentido, el esquema clásico de aprendizaje estímulo-respuesta queda superado. No existe un estímulo para un sujeto si a este no le resulta significativo.

Como ejemplo, tomemos la comparación de escrituras de los chicos por yuxtaposición y la comparación con escrituras convencionales. Los límites de su saber frente a la situación provocan que el sujeto dude de sus conocimientos y se aboque a la búsqueda de nuevas formas de resolución. "Nos ubicamos en una posición según la cual el proceso de construcción de un concepto matemático comienza a partir del conjunto de actividades intelectuales que se ponen en juego frente a un problema, para cuya resolución, resultan insuficientes los conocimientos de los que se dispone hasta el momento"[4].

Adherir a esta posición trae aparejadas ciertas condiciones de funcionamiento de la clase. En este sentido, debe haber momentos en que el estudiante se vea enfrentado a problemas que le exijan tomar decisiones con respecto a los conocimientos que debe utilizar para resolver esos problemas. Asimismo, deben existir instancias en las que el estudiante se encuentre con que esos conocimientos no son totalmente ajustados para resolver la situación planteada y pueda, entonces, elaborar nuevas relaciones que serán la base para identificar nuevos conceptos. En este proceso, resulta central que el alumno vaya construyendo herramientas para poder saber si su producción es o no correcta, para poder justificar las decisiones que fue tomando y estar seguro de su trabajo, independientemente de las evaluaciones que el

[4] *Marco General del Diseño Curricular* (2004): óp. cit.

docente pueda hacer. Para que esto sea posible, será necesario a su vez que el docente realice intervenciones que ayuden al alumno a sostener su trabajo, sin por ello reemplazarlo en su tarea de producción.

Varias ideas respecto a la enseñanza en el Primer Ciclo

A continuación, se presentan diferentes tipos de problemas que ofrecen ejemplos de posibles secuencias de trabajo en el aula.

Exploración de las regularidades de la serie numérica oral y escrita para leer números y escribirlos (Primer grado)

Ya dijimos que el trabajo con portadores de información numérica es muy importante. En este sentido, los cuadros de números, como el que se muestra a continuación, son portadores que permiten generar variadas situaciones que favorecen la determinación de ciertas regularidades. Por ejemplo, los alumnos podrán identificar algunas de estas regularidades al relacionar la numeración escrita con lo que ellos saben de la numeración hablada: "Después de los 'diecis', 'veintis', 'treintis', se empieza otra vez con el 1, 2, 3, hasta el 9", dicen los chicos.

Por otra parte, estos cuadros permiten que los alumnos extraigan conclusiones del tipo: "Los diecis empiezan con 1"; "Todos los ochenta empiezan con 8" ; "El cuarenta y siete va con cuatro y siete, te lo dice el número".

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100									

Los portadores funcionan como fuentes de información, como "diccionarios" numéricos a los cuales consultar. No tiene mayor sentido que allí figuren sólo los números que los chicos conocen. Si los conocen, para qué consultarlos: al diccionario, vamos por las palabras que desconocemos o de las cuales dudamos. Por otro lado, es necesario incluir intervalos amplios de la serie numérica para que las regularidades puedan ponerse en juego. Por ello, un cuadro numérico para Primer grado debería incluir, de entrada, los números hasta el 100, como mínimo.

Uno de los propósitos del uso de los cuadros numéricos es que los niños puedan acceder a información sobre la escritura y lectura de números a través de las relaciones entre la numeración hablada y la numeración escrita. Por ejemplo, supongamos que el docente le entrega a Joaquín un papel donde escribió el número 32 y le pide (sin nombrar el número) que le dé a Julián tantas fichas como dice el papel. Si Joaquín no sabe leerlo, el maestro puede indicarle que use el cuadro para averiguarlo. Joaquín, entonces, comenzará a contar desde el 1, señalando con el dedo cada uno de los números de la serie hasta llegar al 32 y, de esa manera, sabrá que al 3 y al 2, les corresponde la expresión "treinta y dos", y podrá comenzar a resolver el problema. Del mismo modo, si el maestro le indica verbalmente que tiene que mandar un mensaje a un compañero escribiendo el número 32, recitará la serie desde el 1 señalando los números y, donde coincida la palabra "treinta y dos" con el número señalado, sabrá que se escribe con el 3 y el 2.

Frente a la misma situación, otros alumnos podrán centrarse en el nudo de la decena y, desde allí, contando de uno en uno, encontrar el número solicitado, por ejemplo, diciendo "30, 31, 32"; otros buscarán el nudo de la "familia" y la columna correspondiente al valor de la unidad estableciendo las coordenadas (32: "Está en la fila de los 'treinti' y en la columna de los que terminan en 2"); y algunos otros podrán resolver el problema directamente por reconocer su escritura.

Esa es justamente la progresión que nos interesa provocar, es decir, que los alumnos avancen en el reconocimiento de los números a través de poner en juego las propiedades que estos tienen.

Es importante que el cuadro esté colocado en un lugar de la clase que permita que los chicos se acerquen a él y les sea posible "tocar" los números. Muchos maestros se sorprenden del interés que despierta y describen cómo los chicos se acercan espontáneamente a compartir lo que saben y, también, para discutir diferentes concepciones.

La elaboración de cuadros individuales es también un recurso adecuado para promover las reflexiones en las que estamos interesados[5].

Los alumnos podrán apoyarse en el cuadro para:

- Comparar números. Así, podrán establecer, por ejemplo, que 87 es mayor que 47 porque "viene después".
- Determinar el antecesor o el sucesor de un número: si hoy es 28, ¿qué día fue ayer?, ¿qué día va a ser mañana? En un negocio, van atendiendo por el número 36, ¿cuál fue el que dijeron antes?, ¿cuál sigue? Si el televisor está puesto en el canal 23, y apretamos una vez la flecha de retroceso, ¿qué canal aparece? ¿Y si apretamos una vez la flecha de avance?; etcétera.
- Averiguar dónde están todos los números que empiezan con una cifra determinada, por ejemplo, todos los números que empiezan con 1, o los que empiezan con 5, etcétera. Interesa que puedan reflexionar sobre cuáles son esos números. Se podrán elaborar pistas para saber cómo nombrarlos (todos los que empiezan con "ocho" son "ochenti"); en todas las filas, siempre aparecen el 1, el 2, el 3..., ordenados, etcétera.
- Averiguar dónde están todos los que terminan con una cifra determinada: ¿qué números serán esos? ¿Qué diferencia hay entre el primer cuatro del 44 y el segundo cuatro? ¿Los dos cuatros representan al número 4?
- Establecer cuántos números hay determinados, por ejemplo, entre el 20 y el 30. ¿Y entre el 9 y el 19?, ¿y entre el 29 y el 39? ¿Y entre el 5 y el 15?, ¿entre el 15 y el 25? Anotar otros números con los que pasa lo mismo, es decir, que hay 10 números entre ellos. Establecer la regularidad de que no hay ningún caso en el cuadro en que no se cumpla que un número que está debajo, en la misma columna, no tenga 10 números más.

[5] Ressia de Moreno, Beatriz y María Emilia Quaranta (2006): *Matemática para que aprendan todos. Numeración escrita y cálculo mental en 1° ciclo. Una experiencia en Centros de Apoyo Escolar.* Bs. As.: Red de Apoyo Escolar.

- Descubrir dónde están todos los números terminados en 9. ¿Qué sucede después de los números terminados en 9? ¿Cómo cambian esos números?, ¿tienen un orden?, ¿cuál?
- Saber rápidamente en cuál fila mirar para ubicar un número sin tener que buscar uno por uno. Cómo hacer para saberlo.
- Resolver adivinanzas, por ejemplo:
  "Alguien pensó un número, está en la fila de los veinte. Es más grande que el 25. Es más chico que el 27. ¿Cuál es?".
- Completar cuadros a los que les faltan algunos números.
- Averiguar cuál es el número que está tapado.
- Corregir portadores con algunos números equivocados.
- Resolver adiciones y/o sustracciones. Por ejemplo, para sumar 25 + 20, algunos alumnos tendrán que contar desde el 1 hasta llegar a 25, y luego, seguir contando 20 más. Otros podrán partir del 25 y "sobrecontar" los 20 siguientes; otros partirán del 25 y utilizarán la regularidad del cuadro sabiendo que, entre el 25 y el 35, hay 10 números y que, entre el 35 y el 45, hay 10 más, y que por lo tanto, se puede usar el conteo de 10 en 10: "25, 35, 45".

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Busque otras posibles utilizaciones didácticas de estos portadores en los NAP y póngalas en juego con sus alumnos.

A continuación, le ofrecemos el desarrollo de una situación de enseñanza.

Adivinar el número en el cuadro (Primer grado)[6]

Este juego a partir del cuadro de números consiste en que los alumnos lleguen a descubrir, mediante la formulación de preguntas, cuál es el casillero que contiene un tesoro. Con la clase organizada en grupos de a dos o de a cuatro niños, el docente les comunica que

[6] Ressia de Moreno, Beatriz y María Emilia Quaranta: óp. cit.

el tesoro estará escondido en algún casillero, pero que no se les indicará en cuál. Cada grupo conforma un equipo y dispone de un cuadro completo con los 100 números, que podrá utilizar para descubrir en qué casillero está el tesoro. Para ello, podrán hacer preguntas que se contesten por "sí" o "no". No están permitidas preguntas como: "¿Es el número...?". Se conversará con los alumnos acerca de cuáles son las preguntas que sí se podrían plantear. Es raro que los niños por sí solos apelen a preguntas del tipo: "¿Es mayor que...?" o "¿Es menor que...?". Por eso, el docente les informará que son preguntas pertinentes para el juego.

Sólo pueden nombrar el número que creen que es cuando estén seguros de ello, no vale arriesgar. Una vez que proponen un número, si no aciertan, quedan fuera de esa partida. Para formular una pregunta, los integrantes del grupo deberán ponerse de acuerdo y levantar la mano.

Les servirán los cuadros que posee cada mesa —o que tenga cada alumno, si se decidiera entregarlos individualmente— para anotar las informaciones que vayan obteniendo a partir de las respuestas a las preguntas. Es necesario resaltar a los niños que deben encontrar el modo de retener esa información.

Se juega una primera partida. El docente va anotando las preguntas y las respuestas en el pizarrón. Al terminar, se organiza una instancia de análisis colectivo acerca de las preguntas formuladas: cuáles son preguntas útiles, qué permiten averiguar, cuáles no aportan nueva información porque preguntan sobre algo que ya se sabía, se analiza la necesidad de tener en cuenta las informaciones dadas en respuestas anteriores, etcétera. También se pueden acordar modos de registrar la información, por ejemplo, tachando los números que ya se sabe, con seguridad, que no pueden ser.

En sucesivas partidas, el docente podrá focalizar el análisis en diferentes aspectos. Por ejemplo, acerca de la escritura del número, de la relación entre esta y la ubicación en el cuadro: "Es de los treinta porque empieza con tres"; o "Después de los treinta, vienen los cuarenta porque, después de tres, viene el cuatro", etcétera.

Con el tiempo, es posible restringir la cantidad de preguntas habilitadas, por ejemplo, hasta 10 preguntas. Esta condición tiene el propósito de llevar a pensar con más cuidado las preguntas que se han de formular, y así facilitar una mayor toma de conciencia de la ineficiencia o redundancia de algunas de ellas. En ese caso, al término de una partida, el maestro podría proponer que enuncien cuáles podrían ser buenas preguntas para ganar y qué permiten saber.

Las preguntas que permiten averiguar el número se refieren a propiedades de las escrituras numéricas. Algunas se refieren a la posición de las cifras: ¿empieza con 4?, ¿es de la fila de los 80?, ¿termina con 9?, etcétera. Otras aluden al orden de los números: ¿es más grande que 30?, ¿es más chico que 60?, etcétera. En la puesta en común, será muy importante generar un espacio que permita analizar las distintas preguntas y establecer cuáles permiten descartar una mayor cantidad de números o las preguntas que sean equivalentes. De esta manera, se realzarán aquellas que sean similares a los ejemplos mencionados. Los alumnos que no hayan podido formularlas descubrirán, así, que hay otros modos posibles de obtener información y comenzarán a establecer nuevas relaciones y a apropiarse de preguntas que permiten descartar una mayor cantidad de números. En otros términos, en los momentos de reflexión conjunta, será interesante dirigir la atención de los alumnos a pensar cómo tener en cuenta la escritura numérica para formular preguntas cada vez más ajustadas.

En partidas posteriores, algunas veces, el juego podrá ser conducido por un par de alumnos. En ese caso, el docente también puede plantear preguntas destacando las propiedades de los números que los alumnos no hayan considerado aún en las preguntas que ellos formularon.

Una vez que dominen la dinámica del juego, pueden jugar de a dos, uno contra el otro.

Como extensión, el docente puede presentar el desarrollo de partidas, mostrando una a una un conjunto de preguntas y respuestas, frente a las cuales los alumnos deban determinar, primero, los intervalos numéricos y, finalmente, con la última información recibida, especifiquen de qué número se trata. Por ejemplo:

a. —¿Es menor que 50? —Sí.
b. —¿Es mayor que 30? —Sí.
c. —¿Es mayor que 40? —No.
d. —¿Está al lado de 35? —No.
e. —¿Está al lado de 33? —No.
f. —¿Está al lado de 38? —Sí.
g. —¿Está entre 38 y 40? —Sí.

Si el docente hubiera mostrado hasta la pista **c.**, podría preguntar: "Teniendo en cuenta la información que tenemos hasta aquí, ¿cuáles son todos los números entre los que se encuentra el buscado?".

Otra actividad que se puede proponer es que el docente dé pistas, de a poco, sin que se planteen preguntas. Sobre un cuadro que tengan disponible, los alumnos irán registrando la información aportada por el docente. Cuando haya finalizado, deberán anotar el número que les parece que es. Por ejemplo:

a. —No comienza con 2.
b. —Termina con 1.
c. —Es mayor que 60.
d. —Es menor que 70.

En el análisis colectivo, podrá retomarse con todo el grupo la discusión sobre qué números son los que cada información dada permite retener o descartar.

Luego, los alumnos pueden preparar, del mismo modo, números y conjuntos de "pistas" para desafiar a sus compañeros a que los adivinen.

Todas las situaciones que presentamos pueden ser planteadas sobre cuadros que contengan números de otros intervalos. Asimismo, en función de los intervalos elegidos y del tipo de problema planteado, pueden funcionar en Primero, Segundo o en Tercer grado. Por ejemplo:

100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
170	171	172	173	174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185	186	187	188	189
190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
200									

1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009
1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019
1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029
1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039
1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049
1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059
1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069
1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079
1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089
1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099
1100									

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
400	410	420	430	440	450	460	470	480	490
500	510	520	530	540	550	560	570	580	590
600	610	620	630	640	650	660	670	680	690
700	710	720	730	740	750	760	770	780	790
800	810	820	830	840	850	860	870	880	890
900	910	920	930	940	950	960	970	980	990

Resolución de problemas que requieran reconocer y analizar el valor posicional de las cifras, en números de 0 a 10.000

Se trata de que los niños resuelvan problemas donde tengan que componer y descomponer números en "unos", "dieces", "cientos", "miles", etcétera. Como ya vimos, no es necesario recurrir a material estructurado en base 10 para que los niños comprendan y se apropien con sentido de este aspecto del sistema de numeración. Es más, no sólo es innecesario, sino que la utilización de esos materiales incurre en diferencias importantes con las reglas de nuestro sistema.

Tampoco son necesarias —las investigaciones así lo demuestran— las descomposiciones de los números en términos de unidades, decenas, centenas, etcétera. El conocimiento más disponible en los alumnos es la escritura de los números y sus denominaciones, y por lo tanto, es donde centraremos las situaciones.

Recordemos que uno de los grandes desafíos para la enseñanza es lograr vincular las conceptualizaciones de los niños con los saberes considerados válidos y que es preciso enseñar.

Un contexto interesante para plantear este tipo de trabajo es el dinero. Veamos un ejemplo.

El cajero (Tercer grado)[7]

Objetivos:

- Reflexionar acerca de las operaciones aritméticas subyacentes a las escrituras numéricas.
- Utilizar descomposiciones aditivas ligadas a la numeración.
- Comprender y utilizar las reglas de la numeración oral.
- Hacer funcionar los cambios 10 contra 1 en dos niveles: diez billetes de 1 se cambian por uno de 10, diez billetes de 10 se cambian por uno de 100, diez billetes de 100 se cambian por uno de 1.000.
- Diferenciar las cifras según su posición en la escritura de un número, asociándoles una cierta cantidad de billetes.

[7] Adaptación de una actividad propuesta en el libro *Apprentissages numériques*, del Grupo ERMEL (editado por Halier), en C. Parra, I. Saiz y P. Sadovsky (comps.) (1993-1994): *Número y Sistema de Numeración y Número. Espacio y Medida.* Bs. As.: MCE. Documento curricular: PTFD.

Materiales:

Para cada grupo de cuatro niños:

- Billetes de $1, de $10, de $100 y de $1.000.
- Cartones con números variados entre el 80 y el 3.000 (un número por cartón).

Primera parte

Etapa 1: Juego de canjes

La clase se organiza en grupos de 4 niños. En cada grupo, se nombra un alumno que será "el cajero" y que tiene los billetes de $1, $10, $100 y $1.000. Por turno, los otros alumnos extraen un cartón y le piden al cajero la cantidad de dinero expresada en el cartón, especificándole qué billetes desean. Si por ejemplo, un alumno extrae el cartón que dice 1.274, puede pedir 1 billete de 1.000, 27 billetes de $10 y 4 de $1; o 12 de $100, 7 de $10 y 4 de $1, etcétera. Los niños juegan 3 turnos conservando los cartones y el dinero que ganan en cada extracción.

Al finalizar los 3 turnos, el maestro pregunta cuánto dinero posee cada niño y quién es el que tiene más dinero.

Procedimientos esperados

- Pedir cambio al cajero para facilitar el conteo de los billetes.
- Agrupar los billetes según su valor (1, 10, 100, 1.000) y contar cuántos billetes de cada clase se tiene y, luego, sumar los resultados parciales.
- Agrupar los billetes según el valor de mayor a menor y realizar el conteo uno a uno (mil, mil cien, mil doscientos, mil doscientos diez, mil doscientos veinte..., mil doscientos setenta y cuatro).
- No contar los billetes, sino hacer la suma de los números escritos en los cartones.

Etapa 2: Puesta en común de la actividad anterior

El docente releva los diferentes procedimientos utilizados para calcular el total de ganancias y pide a los niños que los expongan. Insiste sobre la verificación de la actividad: los cambios son correctos, si hay una correspondencia entre el total con los billetes y el total con los números de los cartones. El maestro invita a los niños a controlar el dinero que han ganado de las dos maneras.

Etapa 3: Ejercicios de familiarización

El maestro propone preguntas al conjunto de la clase, escribiendo los números en el pizarrón.

a. Alguien ha extraído los cartones que dicen 1.500, 240 y 87. Dice que, en total, ha obtenido 1.727. ¿Es correcto?
b. Alguien tiene los siguientes billetes:
   1.000 1.000 1.000 100 100 100
   10 10 10 10 10 1 1 1 1 1 1 1
   ¿Cuánto dinero tiene?
c. Al sumar sus cartones, alguien ha obtenido 3.569. ¿Qué billetes puede ser que tenga? Proponé distintas posibilidades.
d. Los cartones de otro chico suman 666, ¿qué billetes tiene? Proponé dos posibilidades.

Segunda parte

Etapa 1: Variante de "El cajero"

El cajero no puede dar más de 9 billetes de una misma clase.

En la síntesis colectiva de esta etapa, se debe concluir que, mirando la escritura del número sobre el cartón, se sabe lo que hay que pedir al cajero. Por ejemplo, cuando se extrae un cartón con el 2.374, se piden 2 billetes de $1.000, 3 de $100, 7 de $10 y 4 de $1.

Etapa 2: Ejercicios de sistematización

El maestro escribe algunos números en el pizarrón, y los niños deben escribir qué billetes y cuántos habría que pedirle al cajero.

La misma cuestión; pero el maestro nombra los números en voz alta, sin escribirlos.

Extensión de la situación: *El banco*

1. El Sr. Pérez va a retirar de su cuenta $1.420. ¿Cuántos billetes de cada tipo le da el cajero al Sr. Pérez? Completá la tabla.

1.000	100	10	1

2. La Sra. García pide cambio de $5.000. Le dice al cajero: "Deme 3 billetes de $1.000 y el resto, de a $100". ¿Cuántos billetes de cada clase recibe la señora? Completá la tabla.

1.000	100	10	1

3. El Sr. Méndez quiere cobrar un cheque[8] de $3.618. Le dice al cajero: "Por favor, deme la menor cantidad posible de billetes". Completá la tabla con la cantidad de billetes que le entregaron al Sr. Méndez.

1.000	100	10	1

Si el cajero utilizara solamente billetes de $100 y de $1, ¿cuántos de cada valor le entregaría al Sr. Méndez?

Si le hubiera entregado 37 billetes de $100, ¿cuánto dinero le habría pagado el cajero?

4. El cajero del banco tiene que pagar tres cheques de estos valores: $2.109; $1.475 y $3.748.
   Completá la tabla y resolvé. ¿Cuál es la suma total de dinero que debe pagar? ¿Cuál es la cantidad total de billetes de cada clase que debe entregar?

Cheque	1.000	100	10	1
$2.109				
$1.475				
$3.748				
Total				

[8] Se podrán presentar a los alumnos fotocopias de cheques para que dispongan de ellas y las utilicen, de modo que los cheques se transformen en una herramienta conocida por todos los alumnos.

Si le hubieran pagado a un cliente la suma total de dinero del problema anterior, ¿cuántos billetes de cada tipo le habrían entregado? Anotalo en la tabla.

1.000	100	10	1

Compará esta tabla con la anterior. ¿Hay diferencias? ¿Cuáles? ¿En qué se parecen? ¿Qué números se repiten? ¿Cuáles no?

5. Una señora fue al banco a pagar dos cuentas. Una, de $2.897; y la otra, de $674. ¿Cuántos billetes y de qué valor tendrá que darle al banquero? ¿Recibirá vuelto? ¿Cuánto? ¿Con qué billetes se lo darán?

Pensar las prácticas

a. ¿Qué diferencias en el tratamiento del conocimiento aporta cada etapa en la situación "El cajero"? ¿De qué modo se promueve la evolución de los procedimientos de los alumnos?

b. ¿Qué tipo de relaciones se busca establecer en la situación "El banco"?

c. ¿Qué tipo de intervenciones puede anticipar para promover, en los alumnos, el establecimiento de regularidades?

El uso de la calculadora en problemas relacionados con el valor posicional de las cifras

Una cuestión que genera debate es cómo usar la calculadora para que los alumnos aprendan Matemática.

Quisiéramos plantear algunas condiciones didácticas para que las calculadoras se constituyan en herramientas para resolver problemas y que, al mismo tiempo, generen actividad matemática en los sujetos.

Para que esto sea posible, las situaciones tendrán que contemplar *siempre* que los alumnos anticipen y registren el procedimiento *primero* y, luego, lo validen utilizando la máquina.

Si los alumnos no anotaran previamente la orden que le van a dar a la calculadora, ¿cómo podrían dar pruebas de la validez de lo producido una vez que oprimieron la tecla del igual? Muchas veces, no podrán recordar ni las operaciones ni los números que utilizaron, y ya sea que el resultado obtenido sea el correcto o no, al no poder reconstruir la acción, no podrán argumentar acerca de lo producido.

Por otra parte, si los alumnos cometieran errores, ¿cómo podrían saber en qué se equivocaron? ¿Cómo haría el maestro para saber cuáles fueron las fuentes de esos errores, y así poder hacerlos explícitos para que, por medio de un trabajo específico, lograr que ellos desaparezcan? Alguien puede llegar a un resultado incorrecto porque no dispone de los conocimientos necesarios y decide utilizar una operación no adecuada para resolver ese problema o porque, sin darse cuenta, oprimió otra tecla en lugar de la que, en realidad, quería oprimir.

Los siguientes problemas permiten abordar contenidos sobre el sistema de numeración. Para que puedan ser utilizados desde el primer año, deberán aplicarse modificaciones de los números en juego.

1. Completar la siguiente tabla y, luego, verificar con la calculadora:

Escribir en el visor	Lograr que quede	Operación 1.° intento	Operación 2.° intento	Operación 3.° intento
472	402			
3649	3749			
4444	444			

Este tipo de problema destaca el valor posicional de las cifras.

Es posible que algunos alumnos, para resolver el primer ítem, opriman –7. En ese caso, en el visor, aparecerá el número 465, es decir que la máquina mostrará, de inmediato, el error. Entonces, al haber anotado previamente en la tabla –7, ese alumno podrá saber que, con esa orden, no llega al resultado buscado y podrá preguntarse por qué, si la diferencia entre los dos números escritos es el 7, no logra que aparezca 402. Luego, podrá revisar lo hecho y repensar el problema. En cambio, si no hubiera registrado nada, el resultado aparecería como algo contingente. "No me dio, no sé por qué, pruebo otra vez" son algunos de los comentarios que hemos podido escuchar; incluso, hemos observado alumnos que, varias veces, dieron la misma orden a la máquina sin ser conscientes de ello.

En las discusiones posteriores, será muy interesante que los alumnos puedan argumentar acerca de las dificultades que surgieron, ya que, en estas argumentaciones, quedarán explicitados los contenidos a los que apunta la situación. Por ejemplo: "Hay que hacer menos setenta porque ese siete no vale siete, vale setenta, está en el lugar de los que valen diez, veinte, treinta..." o "Yo le sumé cien porque del seiscientos al setecientos hay cien", refiriéndose al segundo caso. "Yo primero hice menos cuatro, pero me dio 4440, después me di cuenta de que tenía que hacer menos cuatro mil para que desapareciera un cuatro y me quedaran solamente tres números", en relación con el tercer caso.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

¿Qué tipo de intervención podría hacer el docente, sin por ello reemplazar la tarea de los alumnos, en el caso de que algunos estuvieran detenidos y no pudieran resolver el problema?

Una posible intervención es sugerirles a los alumnos que lean en voz alta el número y se apoyen en esa información.

Como vimos, la numeración hablada, al no ser posicional, es una fuente de información que facilita la resolución.

2. Mercedes tecleó el número 740, pero se confundió. Quería que apareciera el 1740. ¿Cómo puede corregirlo sin borrar?

Nuevamente, el sentido de este problema es que los alumnos puedan analizar el valor posicional de cada cifra.

3. Formá el número 437 utilizando solamente las teclas: 1, 0, +, =, todas las veces que consideres necesarias. Escribí las operaciones antes de usar la máquina.

Este problema apunta a que los alumnos puedan poner en juego el conocimiento de la organización decimal del sistema de numeración. El procedimiento más económico es hacer:

100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1

4. Hacé que, en el visor, aparezca el número 44. No se puede usar la tecla del 4. Anotá las órdenes que darás a la máquina. Después escribí el número 444 sin tocar la tecla del 4, ¿podrías utilizar lo que hiciste para formar el 44?
   Ahora hay que escribir 4444, pero sin tocar, en ningún momento, la tecla del 4, ¿te sirve lo que hiciste antes? Usalo.

A través de este problema, que involucra la composición de números, nos interesa que los alumnos puedan descubrir las regularidades del sistema y utilizarlas. Si, por ejemplo, alguien hubiera formado el 44 haciendo 20 + 20 + 2 + 2, para lograr escribir 444, sólo tendría que agregar 200 + 200; y del mismo modo, para formar 4444, adicionar 2000 + 2000.

5. Proponé números que se podrían sumar o restar a los siguientes números para obtener resultados terminados en 0:
   35 83 124 391

En el análisis colectivo, será interesante proponer a los alumnos buscar casos en otros intervalos numéricos, en los que no se cumplan los valores que encontraron. Por ejemplo, es claro que, para 35, basta con sumar algún número que termine en 5 para que el resultado termine en 0. En cambio, para 150, ya no sirve sumar números que terminen en 5.

Apuntamos a que puedan concluir que cualquier número terminado en 5, si se le suma 5, da como resultado un número terminado en 0. Del mismo modo, cualquier número terminado en 3, al sumarle 7, da como resultado un número terminado en 0, etcétera. Si los números son mayores, estas estrategias deben ser revisadas.

Propuestas de enseñanza para el Segundo Ciclo

Suele concebirse que el trabajo con los números naturales y con las características del sistema de numeración debiera ser un tema "dado" y "cerrado" en el Primer Ciclo y, por lo tanto, sólo restaría "repasarlo", o extenderlo a números mayores en el Segundo Ciclo.

Remarcamos la necesidad de una enseñanza que permita profundizar las conceptualizaciones de los alumnos sobre el sistema de numeración.

En este sentido, ofreceremos ejemplos de situaciones de enseñanza para que los docentes dispongan de variados elementos que posibiliten que se retomen, en el Segundo Ciclo, las aproximaciones progresivas y parciales a la organización del sistema de numeración que vienen realizando los alumnos desde el Primer Ciclo.

Identificación de las relaciones multiplicativas (Cuarto grado)

1. Al resolver un problema que pedía determinar la cantidad de dinero que se tiene si hay 2 billetes de $1.000, 5 billetes de $100, 3 billetes de $10 y 8 billetes de $1, Sebastián anotó lo siguiente:

2 billetes de $1.000
5 billetes de $100
3 billetes de $10
8 billetes de $1

Joaquín lo anotó así:

1.000 + 1.000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Julián lo anotó así:

2 x 1.000
5 x 100
3 x 10
8 x 1

En cambio, Lucía lo anotó así:

2 x 1.000 + 5 x 100 + 3 x 10 + 8 x 1 =

- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian estas escrituras?
- ¿Cómo se podrán usar para encontrar la respuesta al problema?
- ¿Podrías explicar lo que anotó Lucía?

2. Para cada par de cálculos, indicá cuál da un resultado mayor, sin resolverlos.

4 x 1.000 + 5 x 100 + 2 x 10 — 5 x 1.000
3 x 1.000 + 15 x 100 ——— 4 x 1.000 + 2 x 100 + 9 x 10 + 9 x 1
9 x 100 + 12 x 10 + 28 x 1 —— 9 x 100 + 13 x 10 + 7 x 1

Extensión de las relaciones multiplicativas del sistema de numeración a problemas de división

1. ¿Es posible repartir estas cantidades de dinero sin hacer cuentas, sólo mirando los números, de modo tal que todos reciban la misma cantidad? En algún caso, ¿queda dinero sin ser repartido?

- $800 entre 8 personas
- $800 entre 4 personas
- $706 entre 7 personas
- $200 entre 10 personas
- $105 entre 10 personas
- $150 entre 15 personas
- $153 entre 15 personas

2. Respondé:

a. ¿Cuántos billetes de $10 se necesitan para pagar $1.400?
b. ¿Cuántos billetes de $100 para pagar $3.700?, ¿y 10.000?
c. ¿Cuántos billetes de $1.000 para pagar $100.000?
d. ¿Cuántos billetes de $1 para pagar $4.000?

PENSAR LAS PRÁCTICAS

a. ¿Cuál sería la intencionalidad didáctica al proponer estos problemas?

b. ¿Qué asunto matemático podrían estudiar los alumnos?

Analicemos el problema **1.** Por ejemplo, para poder determinar que 706 no puede repartirse entre 7 personas en partes iguales sin que sobre, se podría realizar el siguiente razonamiento: "700 sí se podría, porque el 7 de 700 significa 7 x 100; entonces, le tocan 100 a cada uno; pero, 706 son 700 + 6, es decir 7 x 100 + 6 x 1, sobran seis porque no alcanza para darle uno a cada uno", etcétera.

La restricción del problema al pedir que resuelvan sin hacer cuentas, sólo pueden mirar los números, apunta a que tomen contacto con la organización aritmética del sistema. En un principio, para los alumnos, no es evidente que, a partir de la lectura de los números, se puedan establecer las respuestas.

El problema **1.** de este apartado requiere apelar también a las relaciones multiplicativas entre las diferentes posiciones.

El uso de la calculadora en problemas que requieren analizar las operaciones implícitas en el sistema de numeración (de Cuarto a Sexto grado)

Las relaciones multiplicativas implícitas en la numeración escrita también se manifiestan en problemas como el siguiente:

1. Escribí la respuesta y, después, verificá con la calculadora.

Un número multiplicado por...	Da...	¿Qué número es?
10	1.600	
100	32.000	
100	1.700	
100	380.000	
100	45.000.000	
10	17.000	
10	340	
1.000	600.000	
10	9.900	

2. Si te sirve, utilizá la información de los resultados obtenidos para responder a las preguntas siguientes:

Un número multiplicado por...	Da...	¿Qué número es?
30	6.000	
200	6.000	
50	250	
400	400.000	
5	250	
500	2.500	
25	100	
400	800.000	
7	140	
6	300	
60	300.000	
300	600.000	

Entre los ejercicios anteriores, existe una diferencia importante. Mientras que en el primero de ellos, sólo se ponen en juego la multiplicación y la división por potencias de 10, en el segundo, se agregan multiplicaciones por factores que no están formados por unos y ceros.

En ambos casos, una estrategia muy probable es que los niños busquen por qué número hay que multiplicar el que aparece en la columna de la izquierda para obtener el del centro.

En el primer cuadro, las cifras que componen el número buscado ya están escritas en el número de la columna del centro (excepto los ceros, por supuesto). Por ejemplo: 10 x 160 = 1.600.

En cambio, en el segundo cuadro, se agrega la complejidad de buscar "en la tabla" un número que, multiplicado por ese, dé por resultado el otro; y luego se debe analizar qué cantidad de ceros corresponde escribir en cada caso.

3. Escribí la respuesta y, después, verificá con la calculadora.

Un número multiplicado por...	Da...	¿Qué número es?
10	40	
10	7.600	
100	120	
10	4.300	
10	17	
10	84.000	
1.000	250	
1.000	19	

Pensar las prácticas

¿Cuál sería el principal objetivo al proponer estos problemas a sus alumnos?

Seguramente, estamos de acuerdo en que lo importante es que los alumnos relacionen la multiplicación y la división en el funcionamiento del sistema. Para encontrar el dividendo de las divisiones propuestas, muy probablemente los niños multipliquen el cociente obtenido por el divisor que se ofrece.

4. Escribí la respuesta y, después, verificá con la calculadora:

Cantidad de folletos	Cantidad máxima de pilas de 10 folletos	Cantidad de folletos que sobran
425		
3.461		
202		
500		
234		
4091		

En este tipo de problemas, interesa analizar las regularidades que aparecen en la tabla, prestando atención a que los alumnos den argumentos acerca de las razones de dichas regularidades. Apuntamos a que identifiquen que la cantidad de pilas para formar corresponde a todo el número, menos la última cifra, que es la que indica "lo que sobra". Por ejemplo, el docente los llevará a reconocer que $425 = 42 \times 10 + 5$, esto permite saber que se podrán formar 42 pilas de 10 y sobran 5, que la última cifra es lo que sobra porque no llega a formar otro grupo de 10, etcétera. Esto deberá relacionarse con la división entera por 10.

Se trata, entonces, de que los alumnos lleguen a reconocer —con la ayuda del maestro— que un número puede expresarse como una multiplicación por 10 más otro número; por ejemplo, $202 = 20 \times 10 + 2$ ó $500 = 50 \times 10 + 0$, y esa expresión nos permite saber el cociente y el resto al dividir un número por 10.

Posteriormente, podrá procederse de la misma manera con divisiones por 100 y por 1.000. Es importante que estas relaciones queden registradas en las carpetas de los alumnos como memoria cronológica de sus aprendizajes, para poder ser consultadas cada vez que el maestro lo considere necesario; para buscar información frente a la resolución de nuevos problemas; para que los alumnos puedan estudiar para las evaluaciones; para que los alumnos más "flojos" puedan estudiar todo lo que necesiten; para que los padres, maestros particulares, entre otras personas, puedan ayudarlos sin contradecir el enfoque de enseñanza.

El uso de la calculadora en problemas que requieren reconocer el valor posicional de las cifras y analizarlo (Sexto grado)

El valor posicional de las cifras puede ser trabajado, con la calculadora, con una propuesta como la siguiente:

Escribir en el visor el siguiente número: 69725384. Lograr que, en el visor, aparezca el 0, luego de realizar 8 operaciones. Estas deben aplicarse sobre las cifras siguiendo el orden de la serie numérica: comenzar hasta lograr que el 2 se transforme en 0, luego el 3, el 4..., y por último, el 9. Registrar en una hoja las sucesivas operaciones que se deben realizar antes de operar la calculadora.

Pensar las prácticas

Resuelva el problema anterior y analice los siguientes ítems:

a. ¿Qué conocimientos son necesarios a efectos de que estén disponibles para resolver este problema?

b. ¿Con qué finalidad didáctica se los daría a sus alumnos?

c. ¿Cómo intervendría para alentar a los alumnos detenidos, sin resolverles el problema?

En este capítulo, hemos tratado de ofrecer una mirada sobre el trabajo con los números que propicia, desde nuestra perspectiva, un vínculo con el conocimiento matemático del mismo tipo propuesto en el capítulo anterior "¿Qué entendemos por *Matemática* cuando se trata de enseñarla en la escuela?".