CAPÍTULO 3

Acerca de la enseñanza de la suma y de la resta

El sentido de la suma y de la resta

En este capítulo, se abordará el trabajo en torno a la suma y a la resta con números naturales. Para iniciar este análisis, les proponemos la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Las siguientes frases han sido expresadas por alumnos de 4.° año de Educación Primaria[1] ante la discusión acerca de "¿qué es sumar?" y "¿qué es restar?".

Sumar	**Restar**
Para mí, es sumar números… Es agregar un caramelo y más cosas… Es poner números o cosas… Es agregarle un número a otro… Es agregarle algo a lo que ya tenés… Es hacer una cuenta de más.	Para mí, es restar caramelos. Es quitar números… Es sacar números o cosas… Es bajar puntos… Es sacarle un número a otro número… Es tener algo y sacarle un poco.

a. ¿Qué ideas cree que han construido estos alumnos sobre la suma y la resta?

b. ¿Qué puede significar, visto desde la enseñanza, que un alumno aprendió los conceptos de *suma* y de *resta* entre números naturales?

[1] Documento N.° 1 *Algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la Matemática en el primer ciclo de la EGB* (1999). Bs. As.: Dirección de Eduación General Básica.

Evidentemente, no es esperable identificar una única respuesta a la pregunta que plantea el ítem **b.** de la actividad anterior. Pero para aproximar algunas ideas al respecto, podría ayudar formularse la siguiente pregunta: ¿qué sería deseable que un alumno supiera cuando termine su escolaridad en relación con los conceptos de *suma* y de *resta*?

Últimamente se comenta, en diferentes artículos y libros, la preocupación respecto de que los alumnos construyan el *sentido de las operaciones*, en nuestro caso particular, de la suma y de la resta. Sin embargo, cabe destacar que esta afirmación también adquiere diferentes connotaciones. Para algunos, el sentido pareciera estar vinculado al uso cotidiano. Es decir, la construcción del sentido por parte de los alumnos implicaría que resolvieran distintas situaciones, próximas a su entorno, en las cuales "funcionen" las sumas y las restas.

En cambio, para otros, dicha construcción adquiere una connotación diferente, como se refleja en la siguiente cita:

> ... el sentido de un conocimiento varía, evoluciona, cambia de alumno a alumno o para un mismo alumno de un momento a otro ante distintas situaciones... Sin embargo, pese a que la construcción del sentido es dialéctica, móvil y sumamente sutil, es posible pensar, desde la enseñanza, qué sentidos de las operaciones se están propiciando a raíz de los problemas que se plantean a los alumnos, a raíz de los procedimientos que se asegura que dominen, a raíz de las representaciones que se movilizan...[2]

A partir de esta segunda concepción, que compartimos, sobre el sentido de un conocimiento matemático, una expectativa podría ser que los alumnos, frente a una diversidad de problemas que se les propongan, puedan identificar de manera autónoma, cuáles se pueden resolver sumando, cuáles restando y cuáles, apelando a cualquiera de las dos operaciones. Pero a la vez, sería deseable que los alumnos encontraran alguna manera de representar matemáticamente los problemas y estuvieran en condiciones de desplegar diferentes procedimientos o recursos que les permitieran arribar a la respuesta y que,

[2] Documento N.° 2 *Matemática en el primer ciclo* (1994). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula.

además, pudieran dar cuenta de la validez de los resultados obtenidos a partir de las relaciones matemáticas que han establecido.

Asumir estas expectativas obliga, en cierta medida, a concebir el trabajo en torno a la suma y a la resta como una labor que demandará varios años de escolaridad. Sería absurdo exigir a los alumnos el dominio de la variedad de conocimientos descriptos, trabajando con estos conceptos solamente uno o dos años.

Ahora bien, cuando se plantea que los alumnos puedan identificar y resolver diferentes problemas aditivos[3], los más frecuentes que se abordan en la escuela dan cuenta de la acción de agregar —para la suma— y de quitar —para la resta—.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

1. Lea los siguientes enunciados de problemas e intente identificar las diferencias entre ellos[4].

a. En un bolsillo, tengo 7 figuritas y, en el otro, 5. ¿Cuántas figuritas tengo?

b. Camilo tenía 7 figuritas y ganó 5 en el recreo. ¿Cuántas figuritas tiene ahora?

c. Lisandro tenía 7 figuritas. Jugó en el recreo y ahora tiene 12. En el recreo, ¿ganó o perdió figuritas? ¿Cuántas?

d. Laura ganó 7 figuritas. Ahora tiene 12. ¿Cuántas tenía antes de jugar?

e. Martina tiene $47, y Silvana tiene $82. ¿Cuánto dinero más tiene Silvana que Martina?

f. Carlos perdió 7 figuritas. Ahora tiene 12. ¿Cuántas figuritas tenía antes de jugar?

g. Gustavo tenía 12 figuritas y perdió 7. ¿Cuántas tiene ahora?

[3] Vergnaud (1983) se refiere a un campo de problemas que admiten ser tratados desde la suma o desde la resta, configurando de esta manera un "campo conceptual". El autor alude también a toda una clase de problemas asociados a estas operaciones.

[4] Para la elaboración de estos problemas, se ha considerado el libro *Las Operaciones en el Primer ciclo*, de Claudia Broitman (2005). Bs. As.: Novedades Educativas.

h. Camilo tiene 7 figuritas. Lisandro tiene 5 más que Camilo. ¿Cuántas figuritas tiene Lisandro?

i. Malena tiene 12 figuritas. Laura tiene 5 menos. ¿Cuántas figuritas tiene Laura?

j. Carlos perdió 7 figuritas en el primer recreo y 5 figuritas en el segundo recreo. ¿Cuántas figuritas perdió?

k. Jugando el primer partido, Joaquín ganó 12, en el segundo partido perdió 5, ¿qué pasó entre los dos partidos? ¿Ganó? ¿Perdió? ¿Cuánto?

2. **Considere la variedad de problemas aditivos que se han propuesto en el ítem anterior y analice las siguientes cuestiones respecto de ellos.**

a. ¿Qué tipos de problemas reconoce como los que, seguramente, sus alumnos podrían resolver, pues han abordado esos tipos de problemas en sus clases o en su escuela?

b. ¿Qué tipos de problemas pocas veces han sido considerados en su escuela o en sus clases?

c. Si tuviera que distribuir los diferentes tipos de problemas a lo largo de varios años de escolaridad, ¿cuáles sería pertinente tratar en 1.° grado? ¿Y en 2.°? ¿Y en 3.°? ¿Y en 4.°?

Tomemos como ejemplo algunos de los problemas propuestos en la actividad anterior:

a. En un bolsillo, tengo 7 figuritas y, en el otro, 5. ¿Cuántas figurita tengo?

b. Camilo tenía 7 figuritas y ganó 5 en el recreo. ¿Cuántas figuritas tiene ahora?

h. Camilo tiene 7 figuritas. Lisandro tiene 5 más que Camilo. ¿Cuántas figuritas tiene Lisandro?

Es claro que estos tres problemas pueden ser representados matemáticamente con el cálculo 7 + 5. Su resolución ofrece la respuesta a los tres problemas. Sin embargo, involucran relaciones diferentes, en particular, para los alumnos[5].

[5] Sobre el texto de C. Broitman (2005), óp. cit.

En el problema **a.**, tanto el 7 como el 5 son las medidas de dos colecciones de figuritas. En tanto que 12 es la medida de la colección total y no representa ninguna variación, sólo es la unión de las dos colecciones.

En el problema **b.**, el 7 sigue siendo la medida de una colección de figuritas, en tanto que el 5 representa una transformación positiva que opera sobre esa medida. Es decir, el estado inicial (7 figuritas) se ve afectado por una transformación (se agregan 5 figuritas) para obtener un estado final (12 figuritas), que es el que se trata de averiguar. Y según sobre lo que se interrogue (estado inicial, transformación o estado final), será el sentido que adquieran las operaciones.

En el problema **h.**, el 7 es la medida de una colección, pero el 5 ya no es una medida ni una transformación: es una relación entre la cantidad de figuritas de ambos niños.

> Estos tres problemas, desde el punto de vista matemático, son equivalentes, pero no lo son desde el punto de vista de los niños. Numerosas investigaciones muestran (Vergnaud, 1981, 1982; Fayol, 1986) que existen diferencias de varios años entre el reconocimiento de algunos tipos de problemas de suma y de resta. Esto no significa que sea suficiente el paso del tiempo para que los niños los reconozcan. Por el contrario, a causa de las dificultades que les son propias, distintos problemas de suma y resta deben ser abordados como objeto de estudio en la escuela para que sean efectivamente reconocidos por los niños. En consecuencia, el estudio de la suma y de la resta precisa ser encarado a lo largo de varios años[6].

Proponemos, entonces, compartir un conjunto de expectativas de logro asociadas a las operaciones que estamos tratando, que han sido organizadas por grado en un documento[7] del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

[6] Ídem.

[7] Nos referimos al documento denominado *Aportes para el seguimiento del aprendizaje en procesos de enseñanza* (2006). Bs. As.: Ministerio de Eduación, Ciencia y Tecnología de la Nación.

"Darío debe 7 figuritas a Roberto y 8 a Nancy. ¿Cuántas figuritas debe?".

Carla

7 + 8 =

15

MICAELA MONELLA

EMANUEL

1 2 3_4_5_6_ 7_8_9_10_11 12 13_14_15_

COME ASTA 7 Y SEGI CONTANDO 8 E 15

7 Y 8
15

DANIEL 7

PORQUE 7+7

8+8 Y LE SA 9

1 Y ME DIO 15

a. ¿Cuáles son las diferencias más notorias entre los tres modos de resolución?

b. ¿Qué conocimientos se ponen en juego en cada uno de ellos?

Seguramente, el análisis desarrollado permitirá identificar que los recursos de cálculo que se desplieguen en torno a un problema dependerán de los conocimientos de los que dispongan los alumnos. Es función de la escuela generar las condiciones para que los niños puedan avanzar, desde estrategias de cálculo más elementales hasta el empleo de recursos cada vez más elaborados y más económicos.

En numerosas situaciones, se proponen, desde la escuela, recursos de cálculo cuya representación y lógica de funcionamiento dista mucho de los modos de representación, los recursos y las relaciones entre números de que disponen y despliegan los alumnos. Por ejemplo, frente a un problema como el siguiente: "Juan tiene 7 figuritas. Le

regalaron un paquete, y ahora tiene 15. ¿Cuántas figuritas había en el paquete?", en el cual se trata de determinar la distancia entre dos números, hay alumnos que lo resuelven de la siguiente manera:

7 15

8 PORQUE 8 Y 7 ES 15

Sin embargo, en algunas oportunidades, la escuela ofrece un recurso de cálculo como el siguiente:

$$\begin{array}{r} \cancel{1}\,{}^{1}5 \\ -\ 7 \\ \hline \end{array}$$

Es decir, se corre el riesgo de enfrentar a los alumnos a diversas contradicciones. Por un lado, un problema que muchos alumnos piensan a partir del "sobreconteo", o como una suma, la escuela fuerza, sin instancias intermedias, a la aparición de un algoritmo de resta desde un modo de representación que se encuentra bastante alejado de las posibilidades de interpretación de un alumno. Por otra parte, se recurre a técnicas apoyadas en un discurso similar al siguiente: "Como cinco menos siete no se puede hacer, le pido uno al compañero...", para hacer finalmente lo mismo que se ha tachado: 15 – 7. Es decir, la representación y su técnica de cálculo suponen el riesgo de desvirtuar el sentido que propone el problema.

No estamos diciendo que los algoritmos de cálculo no sean un objeto de enseñanza. Sólo advertimos sobre los riesgos que implica presentar recursos de cálculo muy distantes de las relaciones entre números y las representaciones que despliegan los alumnos al intentar resolver un problema como el propuesto en el ejemplo anterior. Es el sentido lo que comienza a desdibujarse.

Para avanzar en la discusión sobre el abordaje del cálculo, compartimos el posicionamiento adoptado en el Diseño Curricular para Primer Ciclo de la Ciudad de Bs. As., donde es posible leer, en el siguiente párrafo que transcribimos, uno de los objetivos en torno a la enseñanza del cálculo:

> ... Disponer de variados procedimientos y técnicas de cálculo, ser capaz de seleccionar los más pertinentes en función de los problemas que se busca resolver y de utilizar alternativas para controlar procesos y resultados constituyen propósitos fundamentales de la escolaridad obligatoria. Un enfoque diversificado en el trabajo con cálculo, que incluye el cálculo exacto y aproximado, el cálculo mental, el uso de calculadora, crea un ambiente de resolución de problemas que lleva a los alumnos a discutir, analizar, preguntar, elaborar estrategias, justificar y validar sus respuestas[9].

Pensar las prácticas

El siguiente enunciado pertenece al campo de problemas aditivos. Está incluido en una colección de problemas propuestos a un grupo de alumnos, luego de haber jugado al Juego de la Oca, en una instancia en la cual el juego se simula, con condiciones que no son exactamente las mismas: "Si mi ficha está en el número 75 y tengo que avanzar 26 casilleros, ¿en qué número debo ubicar la ficha?".

Le proponemos que interprete los siguientes cálculos que dan respuesta al problema.

a. $75 + 26 = 70 + 20 + 11 = 90 + 11 = 101$
b. $75 + 26 = 95 + 6 = 100 + 1 = 101$
c. $75 + 26 = 81 + 20 = 101$
d. $75 + 26 = 100 + 1 = 101$
e. $75 + 26 = 70 + 10 + 10 + 5 + 5 + 1 = 90 + 10 + 1 = 101$

[9] *Diseño Curricular para Primer Ciclo* (2004). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación.

Una primera cuestión para destacar, en relación con la actividad anterior, es la siguiente: las estrategias de cálculo dependen, en gran medida, de los números que intervienen y de las relaciones que quien se enfrente al cálculo haya podido establecer entre esos números. En particular, aquellas vinculadas al sistema de numeración[10]. Sólo a modo de ejemplo, desplegaremos una de ellas, la propuesta en el caso **a.**:

$$75 + 26 = 70 + 20 + 11$$

Esta descomposición de los números 75 y 26 involucra el reconocimiento de que el número 75 equivale a $70 + 5$, y el número 26 equivale a $20 + 6$. Sin este conocimiento, difícilmente alguien pueda pensarlo de esta manera.

Por otro lado, disponer del resultado de $7 + 2 = 9$ permite inferir el resultado $70 + 20 = 90$ a partir de conocer ciertas características del sistema de numeración.

El cálculo $5 + 6 = 11$ puede ser resuelto usando "los dedos", o bien, apelando a que $5 + 5 = 10$ y, en consecuencia, $5 + 6$ debe ser uno más, es decir, 11.

Finalmente, $90 + 11$ podría haber sido pensado como $90 + 10$, cuyo resultado es fácil, 100, al que se le agrega 1, es decir 101.

Con el objeto de conceptualizar algunos de los temas que se han mencionado recientemente, transcribimos algunos párrafos del Diseño Curricular para Primer Ciclo de la Ciudad de Bs. As.:

> ... Se entiende como cálculo mental el conjunto de procedimientos que, en función de los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para producir resultados exactos o aproximados.

El cálculo mental se apoya en el hecho de que existen diferentes maneras de calcular, y que se puede elegir la que mejor se adapta a una determinada situación. Así, cada situación de cálculo constituye un problema abierto que puede ser solucionado de formas diferentes, por lo que se invierten en ello los conocimientos disponibles sobre los números y sobre las operaciones.

[10] Ver el capítulo "Los números naturales y el sistema de numeración", en este mismo libro.

> Las actividades de cálculo mental proponen el cálculo como objeto de reflexión, favoreciendo la aparición y el tratamiento de relaciones y propiedades, que en el primer ciclo serán principalmente utilizadas y más tarde serán reconocidas y formuladas.
> El cálculo mental también puede ser considerado como una vía de acceso para la comprensión de los algoritmos. En el cálculo mental, la reflexión se centra en el significado de los cálculos intermediarios; y esto facilita la comprensión de las reglas de las técnicas...

Ahora bien, la producción por parte de los alumnos de diferentes recursos de cálculo no es azarosa ni mágica. Será necesario ofrecer a los niños, en numerosas oportunidades y de manera sistemática, un conjunto de actividades que favorezcan la posibilidad de[11]:

- Disponer progresivamente de un conjunto de resultados numéricos relativos a la adición y a la sustracción: suma de dígitos, suma de dobles, complementos a 10; restas de la forma "10 menos un dígito".
- Disponer progresivamente de un conjunto de resultados numéricos relativos a la adición y a la sustracción: suma de decenas, suma de centenas, complementos a 100, sumas y restas de múltiplos de 5, restas del tipo "$a - b$ con $a < 20$ y $b < 10$", etcétera.
- Utilizar resultados numéricos conocidos y las propiedades de los números y las operaciones para resolver otros cálculos.
- Explicitar las estrategias utilizadas y, posteriormente, compararlas con las elaboradas por otros.
- Calcular sumas y restas utilizando distintas estrategias.
- Dominar progresivamente los algoritmos convencionales para la adición y para la sustracción, e investigar otros algoritmos producidos por otros alumnos o propuestos por el docente.

Si bien la secuencia anterior no es la única posible, es importante atender al hecho de que contempla la preservación de los tiempos necesarios para que los alumnos se involucren en un modo de producción y de estudio que demanda una cierta organización.

[11] *Diseño Curricular para Primer Ciclo* (2004): óp. cit.

Acerca del uso de material concreto

Para pensar sobre este tema, le proponemos que analice la siguiente situación.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Se propone a los alumnos de 1.° año/grado la siguiente situación:

Un niño pasa al frente y pone, a la vista de todos, 7 chapitas en una caja; después pasa otro niño y pone, también a la vista de todos, 8 chapitas. Se les pide a los niños que encuentren una manera de saber cuántas chapitas hay en la caja.

Compare las siguientes maneras de resolver el problema, intentando establecer similitudes y diferencias:

Resolución 1
Recurriendo a lápices, se colocan en la mesa 7 de ellos, luego 8 lápices y se los cuenta: son 15.

Resolución 2
Se colocan 7 "en la cabeza" y se sigue contando, con los dedos, hasta obtener 15.

Resolución 3
Se realiza el dibujo de 7 chapitas, luego de 8, y se cuentan: son 15 chapitas.

Resolución 4
Son 7, y otras 7 son 14, y una más son 15.

Estas cuatro resoluciones no implican un orden cronológico respecto de la aparición dentro del aula. Simplemente, son posibles producciones de las que, desde luego, cada una de ellas depende de lo que los alumnos hayan tenido oportunidad de elaborar previamente. Y dicha elaboración debería aproximarse, de alguna manera, al modo de trabajo propuesto en el primer capítulo "¿Qué entendemos por *Matemática* cuando se trata de enseñarla en la escuela?".

Y esta es una cuestión que ha dado lugar a muchas discusiones en distintos momentos de la enseñanza de la Matemática y se refiere al lugar que ocupa —sobre todo en los primeros grados— la utilización del material concreto para producir resultados o para comprobarlos. Hay distintas maneras de recurrir al uso de este tipo de materiales.

Pensemos en el ejemplo que se propone en la actividad anterior. Los alumnos podrán utilizar diferentes estrategias para arribar al resultado. Si para estar seguros, cuentan las chapitas, estarán realizando una comprobación de tipo empírico. En cambio, si se les pide a los niños que encuentren argumentos que expliquen el resultado, sin usar las chapitas, estarán validando lo producido, pero en términos matemáticos. Se trata de propiciar que los niños identifiquen que los resultados que obtienen son producto de poner en juego relaciones entre números, propiedades, en definitiva, entre diversos recursos propios de la matemática.

Por otro lado, si por diferentes motivos el modo de comprobar un resultado debiera ser empírico, resulta conveniente que los alumnos realicen una anticipación del resultado y luego que lo corroboren empíricamente.

> Las comprobaciones de tipo experimental hacen posible una interacción entre los modelos matemáticos que los niños van elaborando y los aspectos de la realidad que son modelizables a través de las herramientas matemáticas. Sin esta interacción, los niños no tendrían posibilidad de hacer funcionar esos modelos, de ponerlos a prueba. Concluimos entonces que, cuando las constataciones empíricas se plantean como una verificación de aquello que se ha anticipado, se empieza a hacer observable la potencia de la matemática como herramienta que permite anticipar los resultados de experiencias no realizadas[12].

Por otro lado, vale la pena enfatizar en que si un docente, para resolver un problema propuesto a sus alumnos, demanda a todos los niños el uso del mismo material, se corre el riesgo de que los recursos autónomos, los modos de representación y las relaciones numéricas que se establezcan a propósito del problema puedan permanecer ocultos

[12] *Marco General del Pre-Diseño Curricular* (1999). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula.

debajo del manto del material concreto, ya que todos los alumnos harían más o menos lo mismo, pues deben recurrir al mismo objeto de trabajo. Es decir, se corre el riesgo de que no aparezcan diferentes procedimientos que permitirían abrir un debate matemático, con argumentos matemáticos, en busca de una solución y de su validez.

Acerca de los algoritmos de suma y de resta

Tal como se ha mencionado, la expectativa es que los alumnos, producto del trabajo realizado, estén en condiciones de decidir de manera autónoma, ante un problema, cuáles son los recursos más pertinentes de desplegar para arribar a una resolución fundamentada. Esta decisión podría basarse en los números que intervienen, en las variables que plantea el problema y en los modos de representación que se elijan.

También se ha mencionado como expectativa que los alumnos, como consecuencia de la enseñanza, ante la necesidad de resolver alguna situación que involucre la suma o la resta, estén en condiciones de recurrir al cálculo mental, a la calculadora, o bien, a los algoritmos convencionales.

Para avanzar sobre el tratamiento de los algoritmos convencionales en relación con la enseñanza, le proponemos analizar la siguiente cuestión:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Frente a un problema para cuya resolución los alumnos debían encontrar el resultado de hacer 36 + 25, y ante la posibilidad de "parar la cuenta", se presentaron las siguientes producciones de los niños:

36 + 25 = 30 + 20 + 11 = 61

36 → 30 + 6
+25 → 20 + 5
61   50 + 11
50 + 10 + 1
60 + 1

35
+25
11
+50
61

35
+25
50 + 11 = 61

a. Intente explicar cada uno de los modos de resolución.

b. ¿En qué medida el recurso del cálculo "horizontal" o el cálculo mental podría servir como soporte al cálculo algorítmico?

c. Invente diversos modos de resolver 84 – 38, sin usar el algoritmo de la resta, pero que permitan ir aproximándose a dicho recurso de cálculo.

Los algoritmos de suma y de resta son una construcción histórica que demandó mucho esfuerzo y tiempo. Se trata, sintéticamente, de una secuencia de pasos que, sin importar los números que intervienen, permiten obtener el resultado de una suma o de una resta. Al tratarse de algoritmos, es lógico aceptar que los fundamentos de su funcionamiento estén ocultos bajo un modo de representación que intenta ser el más económico. Tomemos, a modo de ejemplo, el algoritmo de la resta para resolver 73 – 28. Usualmente, su representación es similar a la siguiente:

$$\begin{array}{r} \overset{6}{\cancel{7}}\,{}^{1}3 \\ -\;2\;8 \\ \hline 4\;5 \end{array}$$

En algunas oportunidades, incluso, se presenta con líneas que subdividen unidades de decenas y se lo acompaña de un discurso del modo en que ya fue comentado anteriormente.

Ahora bien, al realizar la cuenta, las escrituras que aparecen ocultan las razones por las cuales se procede de tal manera. Es decir, como no es "posible" restar 3 menos 8, "pedir 1 al compañero" no pone en evidencia cuál es la lógica del funcionamiento de este algoritmo. Se corre el riesgo de desdibujar las composiciones y descomposiciones aditivas que se realizan de los números que intervienen, de manera conveniente, para poder operar. Para este caso, podría plantearse:

$$\begin{array}{r}73\\ -\,28\\ \hline 45\end{array} \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \\ \end{array} \begin{array}{r}70+3\\ -\,20+8\\ \hline \\ \end{array} \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \\ \end{array} \begin{array}{r}60+13\\ -\,20+\ \ 8\\ \hline 40+\ \ 5\end{array}$$

Al "no poder" restar 3 menos 8, conviene descomponer el 73 como 60 + 13 para poder realizar 13 – 8. Esta lógica puede quedar oculta en el modo de representación convencional.

¿En qué medida es posible ayudar a los alumnos en la producción de recursos de cálculo que se vayan aproximando o sirvan como soporte para comprender el algoritmo convencional de la resta?

Uno de los recursos principales involucra la posibilidad de componer o descomponer números, de manera conveniente, para que puedan usarse resultados ya conocidos o apelar a cálculos más sencillos para resolver otros más difíciles.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Intente explicar el modo de resolver, en cada caso, el cálculo 73 – 28:

a. 73 – 23 = 50 y 50 – 5 = 45

b. 73 – 20 = 53 y 53 – 8 = 45

c. 78 – 28 = 50 y 50 – 5 = 45

d. 73 – 30 = 43 y 43 + 2 = 45

Evidentemente, cada uno de los modos de resolución anteriores se apoya en una descomposición particular de los números. Por ejemplo, en el caso **d.**, se considera el 28 como 30 – 2 y, a partir de allí, se resuelve en primer lugar 73 – 30 = 43 (que resulta un cálculo más sencillo, apoyado en las regularidades del sistema de numeración[13]) identificando que, en dicho cálculo, se han restado 2 más que en el cálculo original. De allí que se deba sumar 2 para encontrar el resultado.

Para finalizar con este apartado, a aquellos docentes que aún no han abordado la resta con dificultad, les proponemos realizar con sus alumnos la siguiente actividad, para la cual será necesario que los niños hayan tenido suficientes experiencias en el trabajo con cálculo mental con restas, apoyadas en composiciones y descomposiciones aditivas de los números y en las regularidades del sistema de numeración.

13 Ver, en este libro, el capítulo 2 "Los números naturales y el sistema de numeración".

Pensar las prácticas

Realice con sus alumnos la siguiente actividad:

Primera parte

Se divide la clase en grupos de 3 alumnos. Solamente 2 grupos de niños reciben billetes y monedas (10 billetes de $10, 10 de $5 y 10 monedas de $1, que pueden ser de juguete, papeles dibujados o algo que los represente).

Se les propone a todos los grupos que resuelvan el siguiente problema:

"Juan tiene $45 y compra un pantalón y una remera. Gasta $28. ¿Cuánto dinero le queda?".

Solamente los dos grupos que recibieron billetes pueden recurrir a ellos para resolver este problema, los demás grupos de niños deberán resolverlo haciendo cálculos.

Segunda parte

Una vez que los niños identificaron que se trata de una resta y resuelven el problema del modo que puedan, se propone un intercambio que garantice que todos los alumnos arriben a que le quedan $17 a Juan. Se trata de fomentar la producción de explicaciones tanto en el terreno del cálculo como en el uso de billetes. Posteriormente, el docente propone escribir el cálculo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 4\ 5 \\ -\ 2\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Y pregunta cómo se podrá hacer la cuenta, así escrita, de manera tal que el resultado sea 17.

Antes de probar con sus alumnos esta actividad, intente analizar los siguientes aspectos:

a. ¿Qué supone que harán sus alumnos para resolver el problema, tanto los que trabajan con cálculos como los que trabajan con billetes?

b. ¿Qué pistas les daría a aquellos alumnos que no pueden encontrar el resultado?

c. ¿En qué medida recurrir al dibujo o al uso de billetes puede colaborar en la tarea?

d. ¿Cómo organizaría el intercambio de manera tal que se produzcan explicaciones de por qué se llegó al 17?

e. ¿Qué explicaciones supone desplegarían sus alumnos para que, al resolver la cuenta parada, el resultado sea 17?

En síntesis: se trata de ofrecer variadas oportunidades a los alumnos de manera de colaborar en la construcción del sentido de las operaciones, así como en la producción de recursos de cálculo que les permitan resolver los problemas y poder explicar lo que se hace. Además, se aclarará que los resultados obtenidos no son consecuencia del azar o de la contingencia, sino de las relaciones matemáticas que se han podido establecer.

CAPÍTULO 4

El trabajo con la multiplicación y con la división

La enseñanza de la multiplicación y de la división demanda varios años de trabajo en la escolaridad para que los alumnos puedan identificar los diferentes problemas que estas herramientas permiten resolver, logren dominar la variedad de relaciones numéricas que es posible establecer y elaboren la diversidad de recursos de cálculo que es pertinente disponer a propósito de estas operaciones.

En este capítulo, se desarrolla un análisis de los diferentes problemas que podrían dar sentido a estas operaciones así como un abanico de recursos de cálculo asociados a ellas, que podrían surgir a la luz de los problemas y que permiten avanzar en el reconocimiento de las propiedades y de las relaciones entre la multiplicación y la división, pertinentes en los años de escolaridad primaria. Por una cuestión organizativa, en primer lugar, se despliega el trabajo propuesto acerca de la multiplicación y, posteriormente, el vinculado a la división, asumiendo que ambos conceptos deberían "vivir" simultáneamente en el aula.

La enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación en el Primer Ciclo

El trabajo en torno a la multiplicación podría comenzar a desarrollarse desde los inicios de la escolaridad. Por supuesto, no estamos pensando en alumnos de 6 años usando escrituras multiplicativas ni disponiendo de resultados de "las tablas de multiplicar", sino en chicos resolviendo problemas multiplicativos a través de diversas estrategias.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Encuentre las similitudes y las diferencias entre los tres problemas que se proponen a continuación:

a. Si en un paquete hay 4 figuritas, ¿cuántas habrá en 3 paquetes iguales?

b. En un tablero rectangular, se pueden contar 4 filas de cuadraditos; y en cada una de ellas, 3 cuadraditos. ¿Cuántos de estos hay en el tablero?

c. Si una nena tiene 3 pantalones diferentes y 4 remeras, también diferentes, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir?

Evidentemente, no todos los problemas multiplicativos son de la misma naturaleza. Los hay más sencillos y más complejos. Entre esta variedad de problemas, es posible entonces identificar aquellos que, para ser resueltos, sea posible sumar una cierta cantidad de números iguales. Con frecuencia, se les propone a los alumnos esos problemas desde el inicio del trabajo con la multiplicación. Sus características son propias de una relación de *proporcionalidad directa* y podrían ser objeto de trabajo desde primer grado. Si bien no es un objetivo del Primer Ciclo que los alumnos hablen de la *proporcionalidad* ni reconozcan sus propiedades, se busca que empiecen a utilizarlas intuitivamente para resolver problemas. Tal podría ser el caso del problema **a.** De hecho, las tablas de multiplicar no son otra cosa que "tablas" de proporcionalidad directa, donde la constante de proporcionalidad es el número asociado a la tabla (por ejemplo, la tabla del 4 tiene como constante de proporcionalidad el número 4).

Recién en el Segundo Ciclo —como se verá más adelante—, la proporcionalidad (sus propiedades, sus modos de representación, sus límites en el uso) será un objeto de enseñanza. Allí se podrán analizar, reconocer y sistematizar las propiedades que se usaron, de manera intuitiva, durante el Primer Ciclo.

Una cuestión para destacar es que este sentido de "suma abreviada" de la multiplicación deja de ser válido cuando se multiplican números racionales. Es decir que, por ejemplo, no puede interpretarse como una suma abreviada. O sea, la frase "la multiplicación es una suma abreviada" no es totalmente cierta. Es válido decir que toda suma reiterada de un mismo número puede expresarse como un producto, pero no todo producto es el resultado de una suma abreviada.

El problema **b.** de la actividad anterior invita a pensar la multiplicación como la operación que permite resolver problemas en los cuales los elementos que intervienen están organizados en filas y en columnas. Es decir, se trata de *organizaciones rectangulares* que son perfectamente "atrapables" por el concepto de *multiplicación*. En tanto que el problema **c.** puede también resolverse mediante un producto, pero no es sencillo interpretarlo como una suma reiterada. Este tipo de situaciones, a las que solemos llamar *problemas de conteo* o *problemas de combinatoria*, son aquellas en las que es preciso combinar elementos de diferentes colecciones. Si los alumnos trabajaron sólo alguno de los tipos de problemas presentados, asociados a uno solo de los sentidos de la multiplicación, por ejemplo, a la proporcionalidad y a sus modos de resolución, y se basan en la suma abreviada, es difícil que puedan reconocer el producto en los otros tipos de problemas.

Es necesario trabajar cada uno de estos tipos de problemas en la clase, en diferentes momentos del año y a lo largo de varios años para que los alumnos aprendan por qué la multiplicación es una herramienta para resolver esos problemas. Sin esta labor, es difícil que puedan identificar el producto como un modo de resolver una clase de problemas. No nos referimos a un trabajo con problemas tipo, sino a que los alumnos podrían ser "expuestos" a todo tipo de situaciones analizando las razones por las cuales se elige una determinada herramienta, en este caso, la multiplicación.

Problemas multiplicativos y recursos de cálculo

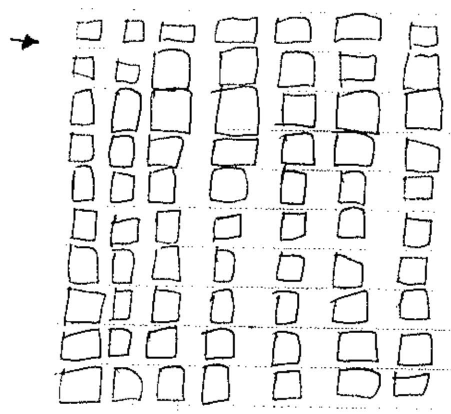
Es claro que, ante los problemas de proporcionalidad que "invitan" a la multiplicación, los primeros recursos del cálculo de los niños se apoyarán en dibujos, esquemas, conteos, o bien, en sumas reiteradas; y posteriormente, como consecuencia de la interacción con los problemas, con sus compañeros y con las intervenciones docentes, la multiplicación será el recurso óptimo de resolución.

Pero ¿qué harán los niños frente a los problemas de las organizaciones rectangulares? Es esperable que nuevamente vuelvan a los dibujos, esquemas, conteos o a las sumas, ya que están en pleno proceso de construcción de los diferentes sentidos de esta operación, y por lo tanto, aquello que resultó fértil para un cierto tipo de situaciones no es evidente que sea fértil para otro tipo de situación. Así es como, frente a problemas que implican armar patios rectangulares usando una cierta cantidad de baldosas cuadradas, hemos encontrado producciones de niños de 3.° grado desde aquellas que identifican la multiplicación,

F 3 BALDOSA
5 EN C FILA
ARMA 15 FILAS
SOBRAN 3 baldosas

FILAS
5 × 10 = 50
5 × 11 = 55
5 × 12 = 60
5 × 13 = 65
5 × 14 = 70

como aquellas otras que aún no disponen de dicha herramienta[1].



66 BALDOSAS 7 EN C/FILA ¿CUANTAS FILAS?
sobran 3 baldosas y ve 9 filas

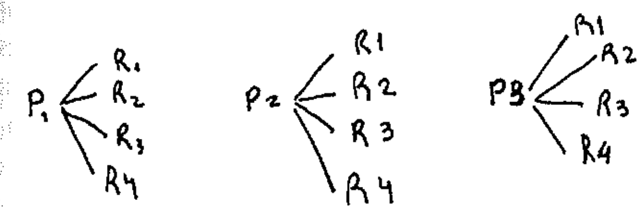
[1] Estas producciones se encuentran en el Documento N.° 4 *Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB* (2001). Bs. As.: Dirección de Educación General Básica. Gabinete Pedagógico Curricular. Matemática.

quiero hacer 1 patio con 57 baldosas. En cada fila voy a poner 6 baldosas ¿Cuantas filas voy a tener?
¿sobran baldosas?

9 filas de 6 baldosas
sobran 3 baldosas

Las interacciones en el aula, el aumento en el tamaño de los números, la sugerencia de resolver los problemas usando cálculos son algunas de las intervenciones docentes que podrían favorecer el identificar la multiplicación como una herramienta más pertinente para resolver este tipo de problemas.

Del mismo modo, al presentar a los alumnos problemas de conteo de colecciones o problemas de combinatoria, del estilo del problema **c.** de la actividad anterior, las producciones de los alumnos podrán ser similares a las siguientes:



1° P → R1 – R2 – R3 – R4
2° P → R1 – R2 – R3 – R4
3° P → R1 – R2 – R3 – R4

4 + 4 + 4 = 12

Por otro lado, estos problemas requieren de discusiones con los alumnos en torno a los siguientes aspectos:

- la necesidad de combinar todos los elementos de una colección con todos los otros de la otra;
- cómo hacer para no olvidarse de ninguno;
- la posibilidad de hacer dibujos, listas, cuadros de doble entrada, flechitas, etcétera;
- la utilidad de ir anotando, al lado, números para después no confundirse al contar;
- luego de resolver el problema, se pueden hacer las sumas al final y, posteriormente, anotar cuál podría ser la multiplicación que resolvería el problema.

El cálculo, las tablas de multiplicar y los algoritmos

Los niños necesitarán disponer progresivamente de un conjunto de cálculos sencillos para resolver ciertos problemas. Memorizar ciertas relaciones numéricas es, sin duda, un recurso útil.

Durante mucho tiempo, la enseñanza de las tablas de multiplicar se realizó de manera ordenada, desde la del 2 en adelante. Además, se trabajó casi siempre de forma secuenciada desde, por ejemplo, 2 x 1 hasta 2 x 10. Una vez "memorizada" esta tabla, se comienza con la del 3, y así sucesivamente.

Es reconocido que los alumnos tienen dificultades para recordar los resultados de los productos. A su vez, pocas veces, las relaciones entre los resultados de las diferentes tablas se transforman en objeto de enseñanza. Es decir, casi no se enseña a reconocer que el resultado de 9 x 6 podría obtenerse a partir del siguiente razonamiento: 9 x 6 = 9 x 3 x 2 = 27 x 2 = 54. O sea, no se apela a las diferentes relaciones y propiedades de la multiplicación; en este caso: que la tabla del 6 es el "doble de la del 3".

Desde esta forma de concebir la matemática, proponemos un trabajo previo a la memorización, que consiste en desarrollar actividades dirigidas al análisis de un conjunto de productos. Por ejemplo, en segundo año, la construcción de tablas de proporcionalidad permite empezar a poner en juego ciertas primeras relaciones numéricas[2]:

[2] Broitman (1999). *La enseñanza de las operaciones en el primer ciclo*. Bs. As.: Novedades Educativas.

Bicicletas	Ruedas
1	2
2	4
3	6
4	8
5	etc.
6	
7	
8	
9	
10	

Triciclos	Ruedas
1	3
2	6
3	9
4	12
5	etc.
6	
7	
8	
9	
10	

Autos	Ruedas
1	4
2	8
3	12
4	16
5	etc.
6	
7	
8	
9	
10	

Estas tablas, una vez analizadas, pueden constituirse en un lugar de referencia para resolver otros problemas. Se apunta a que los niños empiecen a reconocer que, para averiguar "cuántas patas tienen 5 perros", es posible fijarse en cuántas ruedas tienen 5 autos. Las relaciones numéricas allí elaboradas empiezan a ser útiles para otros problemas similares.

Para abordar todos los productos de los números del 1 al 10, se puede trabajar con la tabla pitagórica, que consiste en un cuadro de doble entrada para los productos hasta 10 x 10. Hay varias estrategias para completarla, pero todas se basan en las relaciones entre los diferentes productos. Algunos alumnos identifican que se repiten casi todos los casilleros, por ejemplo: 3 x 4 = 4 x 3; excepto los que son de multiplicación por sí mismos y que "la mitad de la tabla es igual a la otra mitad" (tomando la diagonal principal como eje de simetría). Otros alumnos encontraron que se puede ir llenando verticalmente si se suma sucesivas veces el número de la columna. Cada estrategia lleva implícita una o más propiedades de la multiplicación y de los números involucrados.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

¿Qué otras relaciones identifica en la siguiente tabla pitagórica? Le damos una como puntapié inicial: "La tabla del 7 es la suma de las tablas del 2 y del 5". ¿Por qué cree que ocurre esto?

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Los productos representados en este cuadro pueden transformarse en objeto de análisis y de estudio durante muchas clases. Con este objetivo, se pueden plantear preguntas como: "Unos chicos de otra escuela dijeron que, si uno suma los números de la columna del 2 con la columna del 3, obtiene los resultados de la columna del 5. ¿Es verdad? ¿Pasará con otros números?"; o bien, "Fíjense si hay alguna columna que sea el doble, el triple o el cuádruple de otra", etcétera.

Este cuadro de doble entrada podrá constituirse en "material de consulta", los alumnos podrán utilizarlo para buscar resultados de cálculos que surjan de problemas que se les presentan.

Posteriormente, se propone reconstruir los productos utilizando las propiedades y las relaciones encontradas ("No sé cuánto es 8 x 7, pero sé que es el doble que 7 x 4, o puedo hacer 8 x 5 y 8 x 2, y sumarlos"). Recién después de este trabajo de análisis y reconstrucción, se propone la memorización con actividades y con juegos diversos.

Entre los recursos memorizados de los que los niños deben disponer, se encuentra la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Para ello, se podrán abordar tales recursos a partir de algunos problemas, cálculos de diferentes números x 10, x 20, x 30, x 100, x 200, etcétera.

La enseñanza del cálculo mental, del cálculo estimativo y del uso de la calculadora también deberían formar parte del trabajo, incluso en forma previa al cálculo algorítmico. Los siguientes son ejemplos de cálculos que realizan los chicos:

4) 5 x 4 = 20

5) $\underbrace{5+5}_{10}+\underbrace{5+5}_{10}+\underbrace{5+5}_{10}+\underbrace{5+5}_{10}+5 = 45$

9 AMIGAS   5 x 9 = 45

6) 5 x 8 = 40   5 CHICOS

7) 5 x 5 = 25

$\underbrace{5+5}_{10}+\underbrace{5+5}_{10}+5 = 25$

5 PAQUETES

15 x 4 = 60

15
+15
+15
+15
60

¡EXCELENTE!

También es posible proponer diversos algoritmos que, provisoriamente, se podrán usar en forma simultánea con la finalidad de que los alumnos controlen los pasos intermedios que realizan.

Los procedimientos que los chicos ponen en juego se basan en el uso intuitivo de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Los nombres convencionales de estas propiedades se oficializarán en el Segundo Ciclo, y su empleo convive con formas menos convencionales de enunciarlas: "Vimos que hacer 8 x 7 era lo mismo que hacer primero 8 x 5 y luego 8 x 2, y sumar todo al final. O también, 8 x 7 es sumar 7 veces 8, que puede hacerse sumando 5 ochos y después 2 ochos más".

El recorrido propuesto, que no es el único posible, consiste entonces en resolver diferentes tipos de problemas y diversos cálculos utilizando los resultados de las tablas, apelando a cálculos mentales, al uso de resultados conocidos para encontrar resultados desconocidos, etcétera, previos a cualquier formalización o convención.

Con este bagaje de recursos, será más factible aproximarse a los procedimientos de cálculo más convencionales, tales como un algoritmo, intentando explicitar las relaciones entre los cálculos que los alumnos han producido y los formales o algorítmicos.

El siguiente ejemplo intenta mostrar algunas particularidades del algoritmo de multiplicación convencional:

```
 12
   75
 x 25
 ----
  375
 150
 ----
 1875
```

Los pasos que se suelen seguir podrían describirse de la siguiente manera:

1.° Multiplicar cada dígito de 75 por 5: 5 x 5 = 25, pongo el 5 y "me llevo" el 2; 5 x 7, 35, más 2 es 37.

2.° Multiplicar cada dígito de 75 por 2, dejando un lugar libre: 2 x 5 = 10, pongo el 0 debajo del 7 y me llevo 1. Luego, 2 x 7 es 14, más 1 que me llevé, 15.

Hay varias cuestiones que nuevamente nos plantean preguntas, lo que origina la siguiente reflexión.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

- ¿Por qué se multiplica cada dígito y no, el número entero? ¿Es lo mismo?
- ¿Qué significa la frase "me llevo 2"? ¿Puede explicarse con argumentos matemáticos?
- ¿Por qué se deja un lugar al multiplicar por el segundo dígito?

Uno de los errores que hemos visto frecuentemente consiste en que algunos alumnos suman "lo que se llevan" al número que van a multiplicar, en lugar de sumarlo al producto. En el caso que estamos analizando, hacen por ejemplo: "Siete más dos que me llevé, nueve; cinco por nueve es cuarenta y cinco".

Este, como todos los errores, nos informa del estado de saber del alumno que lo comete.

Creemos que si mediara la reflexión acerca del sentido de esta regla del algoritmo, así como si se establecieran nexos entre los modos de multiplicar que producen los alumnos y esta organización del cálculo, probablemente los errores disminuirían sensiblemente.

¿Cómo se podría intervenir en el caso de que este error apareciera? Supongamos que la cuenta resolviera el siguiente problema: "Para la biblioteca de la escuela, se compraron 75 libros a $25 cada uno. ¿Cuánto dinero se gastó?". El maestro podría preguntar a sus alumnos en qué cambia el problema si se suma el 2 al 7, o si se suma el 2 al 35. ¿Se mantiene igual la cantidad de libros? ¿Y la del costo de cada uno? Apuntamos a que los alumnos descubran que, sumando 7 + 2 = 9; 5 x 9 = 45, no solamente cometen un error con el resultado "correcto" de la cuenta, sino que además, han cambiado el problema: ahora ya no son 75 los libros, sino 95. Al mismo tiempo, habrá que pedir que fundamenten, con la participación del docente, qué significa ese 2 que se "llevan". Apelar a los conocimientos previos acerca de la cuenta de suma puede ser una intervención interesante. Los alumnos podrán reconocer entonces que, en la cuenta de multiplicar, también hay que respetar el valor posicional de cada una de las cifras para operar con ellas.

Nuevamente aparece la necesidad de una enseñanza que tome como eje la resolución de problemas para que los alumnos puedan acceder al sentido del conocimiento matemático.

Resumiendo, el algoritmo convencional oculta las razones matemáticas por las que se hace lo que se hace en cada uno de los pasos. Proponemos un despliegue gradual que lleve a la apropiación del algoritmo, sin perder el sentido de cada uno de los pasos, así como del concepto.

La multiplicación en el Segundo Ciclo

Para iniciar este apartado, le proponemos que piense en la siguiente cuestión:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Proponga problemas que pongan en juego las diferentes propiedades de la proporcionalidad y justifique su decisión. Aclare cuál es la finalidad de cada uno de ellos.

¿Cuál piensa que sería una gestión docente adecuada para cada uno de los problemas?

La proporcionalidad como objeto de enseñanza

En el Segundo Ciclo, los problemas multiplicativos asociados a las relaciones de proporcionalidad directa deberían seguir presentes. Pero a su vez, esta misma relación se transformará en objeto de estudio. Es el momento de analizar, reconocer y sistematizar las propiedades que se usaron, probablemente de manera intuitiva, durante el Primer Ciclo. Para esto, se buscará plantear problemas cuya finalidad sea estudiar sus propiedades (la constante de proporcionalidad; la propiedad de que al doble el doble, al triple el triple; que, sumando los elementos de una de las magnitudes, se corresponderá con la suma de las magnitudes correspondientes, etcétera); estudiar sus diferentes formas de representación (tablas, gráficos, etcétera) y también los límites, es decir, reconocer que, para algunos problemas, no existe una relación de proporcionalidad

(relación entre edad y peso, entre duración de una llamada telefónica y precio, tablas con ofertas, etcétera).

En numerosas propuestas, el estudio de la proporcionalidad directa se asocia a una regla: la regla de tres simple. Si bien es una forma correcta de resolver diferentes tipos de problemas, se debe tener presente que es un mecanismo que corre el riesgo de "esconder" el concepto con el que se está trabajando y puede promover la confusión entre la regla y el concepto.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Le proponemos que imagine diferentes modos de resolución que podrían utilizar o elaborar los alumnos, frente al siguiente enunciado: "20 cajas de mercadería pesan 80 kg.
Averigüen cuánto pesarán 30, 60 y 120 cajas iguales a las otras".

Algunos posibles procedimientos son los siguientes:

- Como 60 cajas es el triple de 20 cajas, 60 cajas pesarán el triple de lo que pesan 20 cajas. Con esta información se puede obtener el peso de 30 cajas, calculando la mitad del peso de 60; y el peso de 120, como el doble.
- Calcular cuánto pesa cada caja y luego, calcular cuánto pesan 30, 60 y 120 cajas, multiplicando estos números por el peso de una caja.
- Calcular primero el peso de 30 cajas y de 60 cajas (de alguna de las dos formas anteriores), y luego, para calcular el peso de 120 cajas, sumar el peso de 60 y dos veces el de 30 cajas, o dos veces el de 60 cajas o cuatro veces el de 30 cajas.

En cada uno de los procedimientos descritos, se ponen en juego propiedades diferentes de la proporcionalidad. Sin embargo, los alumnos no reconocerán estas propiedades si el docente no las institucionaliza[3].

[3] A grandes rasgos, el proceso de institucionalización tiene por objetivo darle un estatus matemático a métodos que los alumnos, muchas veces, usan de manera intuitiva y, por lo tanto, desconocen que esos métodos son reconocidos en la matemática. De este modo, una forma de resolución que surgió en el seno de un problema pasa a ser general y permite resolver una familia de problemas.

- "Al doble de cajas corresponde el doble de peso; al triple el triple; a la mitad, la mitad, etcétera".

Cajas	Peso
20	80
60	60 x 4 = 240

Lo anterior también puede explicarse de manera coloquial: si 20 cajas pesan 80 kg, 60 cajas pesarán el cuádruplo: 60 x 4 = 240 kg.

- "Cálculo de la constante de proporcionalidad, que corresponde al valor de la unidad".

Cajas	Peso
20	80
1	80 ÷ 20 = 4
60	4 x 60 = 240

- "Si se suman los valores de las series, se mantiene la relación de proporcionalidad".

Con esta frase, se quiere decir que se mantiene la *misma* relación de proporcionalidad, es decir, entre las mismas variables y con la misma constante.

Cajas	Peso
30	120
+ 30	+ 120
60	240

En el Segundo Ciclo, los alumnos podrán poner en juego intuitivamente estas propiedades en la medida en que se les permita elaborar sus propios procedimientos. Estas propiedades podrán ser explicitadas en el trabajo colectivo luego de comparar estrategias de resolución. Se apuntará a que todos los alumnos puedan apropiarse de las diferentes formas de resolver el problema.

En problemas posteriores, también es interesante analizar con los alumnos la conveniencia de usar una u otra propiedad según los datos involucrados. Por ejemplo:

Cantidad	Precio
5	125
17	
19	
32	

Para estos datos, conviene calcular el valor de la unidad.

Cantidad	Precio
15	37,5
30	
45	

Para este caso es conveniente utilizar la propiedad al doble, el doble; al triple, el triple, etcétera.

Cantidad	Precio
5	12,50
20	50
25	

Para estos datos, es conveniente sumar los precios de 5 y de 20 para calcular el precio de 25.

Poner en discusión "la conveniencia" del uso de una herramienta no es algo muy habitual dentro de una clase. Existe una especie de "creencia social" según la cual, sólo las personas idóneas en matemática tienen la "habilidad" de darse cuenta de cuándo conviene usar una u otra herramienta, pero que esta habilidad sería inaccesible para el común de las personas. Por el contrario, sostenemos que estas competencias pueden ser enseñadas y pueden ser aprendidas, y que podrán estar disponibles para todos, y no sólo para unos pocos "elegidos", en la medida en que haya mediado el conocimiento.

Si bien el trabajo en torno a la proporcionalidad podrá desarrollarse en el campo de los números naturales, hemos incluido los números racionales, tanto en el ejemplo anterior como en la siguiente actividad, ya que son un objeto de trabajo en el Segundo Ciclo. Les proponemos entonces la siguiente actividad con el fin de pensar en nuevos aspectos.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Resuelva el siguiente problema de dos formas: aplicando propiedades de la proporcionalidad y luego, usando la regla de tres. Compare los métodos de resolución y explíquelos matemáticamente.

El peso de 3 paquetes de fideos es 2,25 kg, mientras que 5 paquetes de los mismos fideos pesan 3,75 kg. ¿Cuál es el peso de 2 paquetes de fideos iguales a los anteriores?

Un modo posible de resolver este problema es restar el peso de 5 paquetes y el de 3 paquetes para obtener el valor de la diferencia, es decir, el peso de 2 paquetes.

Otra alternativa consiste en buscar el peso de un paquete, para luego duplicarlo. En este caso, la información acerca del peso de 5 paquetes no es relevante para encontrar la respuesta al problema. De hecho, en el ejemplo anterior, no se ha utilizado.

Con el mismo procedimiento, se podría haber partido del dato del peso de los 5 paquetes y no utilizar la información sobre el peso de los 3 paquetes.

Otra posibilidad, asociada a la anterior, es recurrir a la "regla de tres", por ejemplo, del modo siguiente:

3 paquetes ______ 2,25 kg o bien: 5 paquetes ____ 3,75 kg

2 paquetes ______ x 2 paquetes ____ x

Tomando como referencia esta escritura, muchos alumnos reproducen una "relación espacial" cuando dicen: "x es igual a este por este sobre este", mientras van señalando con el dedo el número de la izquierda, luego el de la derecha, y por último, el de la izquierda más arriba.

Basta con que el problema cambie y la x quede ubicada en otro lugar para que los alumnos pierdan toda posibilidad de resolverlo. Del mismo modo, al preguntarles las razones por las que multiplican y dividen en ese orden, suelen expresar "No sé, a mí me lo enseñaron así; La maestra me dijo; etcétera". Esto sucede porque el funcionamiento de este procedimiento es oscuro. Se hace difícil reconocer en él que lo que hace la fórmula en un solo paso es lo mismo que cuando se pasa por la unidad.

A su vez, desde la enseñanza, pocas veces se asocian estas relaciones con las fracciones, que podrían "explicar" algunos de los procedimientos que se utilizan. Algunas cuestiones relativas a este aspecto se retoman en el capítulo siguiente, que trata sobre fracciones.

Lo que hemos intentado mostrar es que, en muchos casos, cuando los alumnos no disponen de la "regla de tres", como un procedimiento ya mecanizado, pueden apelar a diferentes estrategias para resolver problemas.

Cada una de estas cuestiones que, en general, no son explicitadas como contenidos de enseñanza, son fundamentales para hacer matemática. Este tipo de habilidades vinculadas a la forma de trabajar en matemática no deben ser relegadas de la clase. Es importante que los docentes tengamos presente la finalidad de enseñarlas, aunque más no sea a través de un debate.

Como dijimos, el estudio de la proporcionalidad involucra también analizar sus límites, es decir, reconocer problemas para los cuales no es posible aplicar este concepto. Para ello, se pueden proponer situaciones que no involucren relaciones de proporcionalidad con el fin de que los alumnos tengan que analizarlas y tomar decisiones acerca de si estas propiedades están o no presentes y si el problema tiene o no solución. Hay situaciones en las que las variables están relacionadas de manera tal que ambas crecen o decrecen juntas, pero no de manera proporcional. Por ejemplo, en cuarto año, se pueden plantear problemas "sin solución" que involucren la relación entre edad y peso, como por ejemplo: "Un niño de 10 años pesa 30 kg. Calcular cuánto pesará a los 20, 30, 40 y 50 años". En casos como este, el objetivo es que arriben a la conclusión de que no es posible responder a la pregunta planteada.

En quinto y sexto años, se pueden incluir problemas en los que se presenten relaciones entre variables, que si bien no respondan a una relación de proporcionalidad, plantean un crecimiento uniforme. No son relaciones de proporcionalidad, pero su crecimiento lo es. Por ejemplo, aquellas en las que es necesario considerar un valor inicial, como en el siguiente caso: "Un señor siempre hace un viaje en taxi de 10 cuadras y paga $3,20. Quiere hacer un viaje de 20 cuadras, ¿costará el doble?". Los alumnos podrán usar sus conocimientos sobre la proporcionalidad para resolver parte del problema, pero será necesario que tengan en cuenta el valor fijo correspondiente a "la bajada de bandera" que hay que agregarle al costo de la distancia recorrida.

Si bien los ejemplos mencionados se refieren a situaciones de proporcionalidad directa, los alumnos del Segundo Ciclo pueden resolver situaciones sencillas de proporcionalidad inversa que pueden solucionarse utilizando intuitivamente sus propiedades. En una instancia posterior, a partir del trabajo colectivo, el docente puede promover el explicitar y el comparar estas situaciones con las de proporcionalidad directa.

Hay otro conjunto de aspectos vinculados a la proporcionalidad que, por una cuestión de espacio, no se desarrollan en este texto. Lo invitamos, de todas maneras, a que piense en la siguiente cuestión:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Enumere diferentes contenidos que se podrían abordar a propósito de la proporcionalidad (por ejemplo: el porcentaje). ¿Qué tipo de actividad matemática cree que podría poner en juego cada uno de ellos? Fundamente su elección.

El estudio de las propiedades de la multiplicación

En el Segundo Ciclo, el trabajo en torno al cálculo mental puede seguir siendo fuente de nuevos problemas, en particular, cuando los alumnos ya disponen del algoritmo de la multiplicación. A modo de ejemplo, se proponen las siguientes producciones:

Calculo mental

① Resolver y analizar

35 x 20 = 700) +700
35 x 40 = 1400) +700
35 x 60 = 2100) +700
35 x 80 = 2800

1° Procedimiento
Nosotros hacemos 35 x 2 y le agregamos el 0 del 20
2° Procedimiento
al resultado de 35 x 20 = 700 le sumamos 700

Ej: 35 x 20 = 700
) +700
1400
) +700
2100
) +700
2800

② Elegir el resultado correcto sin hacer los cuentas.

Ⓐ 505 x 52 = 1620; 56260, 26260

Ⓑ 98 x 37 = 30626; 3626; 6626

Multiplicamos 5 x 5 que son los últimos números multiplicados en esa cuenta y nos da 25 entonces buscamos el número que tenga unidad y decena de mil como número cerca es 26

③ Calcular mentalmente (explicar)

36 x 20 = 720   800 x 400 = 32000

36 x 20 = Primero multiplicamos 36 x 2 y el resultado lo multiplicamos por 10

720

800 x 40 = Primero multiplicamos 800 x 4 y al resultado lo multiplicamos por 10

800   32000

PENSAR LAS PRÁCTICAS

• Una manera posible de hallar el resultado de 35 x 29 es 35 x 20 + 35 x 9. Plantee tres formas más de encontrar el resultado del cálculo anterior. Analice, en cada caso, cuáles son las propiedades que se ponen en juego.

• Un alumno resolvió el siguiente cálculo:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{\times\ 25} \\ 75 \\ \underline{+\ 30} \\ 105 \end{array}$$

Imagine un tramo de la clase dedicado a analizar el error de la cuenta anterior. ¿Qué deberían registrar los alumnos en sus cuadernos a propósito de esto?

El análisis sobre la utilización de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma en estos cálculos permite identificar las razones por las cuales hay que "dejar el lugar" cuando multiplican por dos cifras o comprender la arbitrariedad de iniciar el cálculo por las unidades. Por ejemplo, los siguientes son cálculos equivalentes y válidos:

$$\begin{array}{rl} 450 & \\ \underline{\times\ 14} & \\ 1.800 & (4 \times 450) \\ \underline{4.500} & (10 \times 450) \\ 6.300 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 450 & \\ \underline{\times\ 14} & \\ 4.500 & (10 \times 450) \\ \underline{1.800} & (4 \times 450) \\ 6.300 & \end{array}$$

Ambos algoritmos pueden convivir en la clase. Es interesante que los alumnos conozcan que, usualmente, se inicia el cálculo por las unidades, o que se "deja un lugar" en el producto de las decenas, pero

también es importante que entiendan que ambas cuestiones no constituyen la única manera de multiplicar ni son imprescindibles. El objetivo es que los chicos dominen las razones que subyacen a los modos de calcular que utilizan y que sepan también que han existido y existen diferentes formas de calcular, según los tiempos y las culturas.

Por otro lado, en el Segundo Ciclo, sigue siendo pertinente el trabajo en torno a los problemas de organizaciones rectangulares, contexto apto para analizar las propiedades de la multiplicación y para profundizarlas. Sin embargo, a diferencia del Primer Ciclo, las disposiciones rectangulares también pueden pensarse como una base hacia el estudio de la multiplicación como un medio de cálculo en los problemas de área, además de constituirse en el punto de partida para el estudio de las propiedades.

Por ejemplo, los siguientes problemas pueden usarse con ese objetivo:

- Una cierta cantidad de sillas está ubicadas en 6 filas y en 7 columnas[4]. Si se duplica la cantidad de filas, ¿es cierto que se duplica la cantidad de sillas?
- ¿Es posible responder al problema anterior sin hacer la cuenta?
- Una cierta cantidad de sillas está ubicada en filas y en columnas. Si se duplica la cantidad de filas y la de columnas, ¿es cierto que se duplica la cantidad de sillas?

Se trata de problemas que requieren analizar qué sucede con un producto al multiplicar uno o ambos factores por un número no nulo. Y más en general, se podrán ofrecer a los alumnos diferentes tipos de situaciones que permitan analizar cómo varía el resultado de una multiplicación cuando varían algunos de los números involucrados.

A medida que se avanza en la escolaridad, la multiplicación se convierte en una herramienta que permite entrar en ciertas prácticas algebraicas. El objeto central de estudio deja de ser la cuenta y pasa a ser el análisis de las propiedades y de su validación. En esta instancia, todo el trabajo desarrollado a lo largo de los años anteriores pasa a ser un insumo para abordar las nuevas cuestiones, no sólo en lo referido al aspecto matemático, sino también al tipo de práctica desarrollada.

[4] Este tipo de problemas asociados a organizaciones rectangulares apela a las filas y a las columnas de cualquier organización rectangular (sean sillas en filas y columnas, sean baldosas en un patio de forma rectangular o cuadraditos, que son una unidad de medida para determinar el área de un rectángulo, etcétera).

El tipo de problemas planteados, junto con una gestión adecuada de la clase, permitirían poner en discusión estas cuestiones.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Analice el siguiente problema teniendo en cuenta, en particular, el tipo de práctica que se propicia. ¿Qué aspectos ligados a la validación cree que se ponen en juego?

Considerando que 26 x 25 = 650 *y sin hacer las cuentas*, encuentre los resultados de cada uno de los siguientes cálculos.

a. 52 x 25	b. 26 x 75	c. 13 x 25	d. 52 x 75
e. 650 ÷ 26	f. 650 ÷ 50	g. 650 ÷ 5	

En problemas como el anterior, al restringir el empleo de la cuenta, se está forzando a que los alumnos usen propiedades para hallar los resultados. Además, este mismo problema que, en este caso, está planteado en un contexto intramatemático, puede también plantearse utilizando como contexto las organizaciones rectangulares.

Por ejemplo, el punto **a.** pide hallar el resultado de un producto cuando se duplica uno de los factores. Desde otro punto de vista, puede plantearse que: "650 baldosas están organizadas en 26 filas y 25 columnas. ¿Qué sucede con la cantidad de baldosas si se duplica la cantidad de filas?".

Pensar un mismo problema planteado en otro contexto, muchas veces, permite hallar su solución de una manera más simple. Como los valores que se dan como datos no permiten realizar un dibujo, los alumnos deberán pensarlo de un modo "genérico". Al duplicar la cantidad de filas, se obtienen dos "rectángulos" iguales, uno al lado del otro. Es decir, que se duplica la cantidad de baldosas.

Volviendo al problema inicial, lo anterior equivale a decir que, si se duplica uno[5] de los factores, entonces se duplica el resultado.

[5] El desarrollo anterior permite decir que, si se duplica el primer factor, entonces se duplica el producto. Habrá que trabajar con más problemas para concluir que no importa cuál sea el factor que se duplica, también se duplica el resultado.

Un problema que aparenta ser similar al anterior es el siguiente:

- El producto entre dos números es 520. ¿Es posible encontrar el resultado de multiplicar el doble del primer número por el triple del segundo número? En caso de ser posible, encontrar dicho resultado. En caso de no ser posible, explicar por qué.

Una gran diferencia entre este último problema y el anterior, que torna a este último en el más complejo de ambos, es que no se dice cuáles son los números que intervienen en la multiplicación. Esto hace que muchos chicos pongan valores a los números, por ejemplo, 20 x 26 = 520, y realicen la cuenta, para llegar a la conclusión de que el resultado es el séxtuple de 520. En este momento, la gestión del docente adquiere un rol fundamental en el aprendizaje de los alumnos.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

¿Qué podrían hacer los alumnos que usan números (como 20 x 26) si el docente les hace el siguiente comentario?: "No se conocen los números. Si reemplazás por dos valores en particular, sólo estás encontrando la relación para esos números".

En un primer momento, se impone la necesidad de que los alumnos lleguen a la conclusión —apoyados en argumentos matemáticos— de que el resultado no depende de los pares de números elegidos. Es más, la relación vale, aunque los números no sean naturales. Surge entonces la necesidad de demostrar la afirmación.

Los problemas anteriores son sólo dos ejemplos de las posibilidades que se abren al tomar la multiplicación como objeto de análisis. Es un objeto de estudio complejo que requiere de un análisis particular. Sin embargo, creemos importante que estas reflexiones aparezcan en la clase de Matemática.

El trabajo en torno a la división

Una de las dificultades principales que se presentan en el trabajo con la operatoria está relacionada con el tratamiento de la división. No es raro escuchar a docentes decir que los alumnos llegan a 6.° grado/año sin saber realizar la cuenta de dividir, y que en muchos casos, no suelen darse cuenta de cuándo tienen que recurrir a dicha operatoria.

Dos ideas en torno de las cuales empezaremos a trabajar son que la división puede iniciarse desde primer año y que muchos de los problemas que pueden resolverse con una división también pueden ser resueltos usando una variedad de recursos diferentes.

Distintos problemas que "invitan" a la división

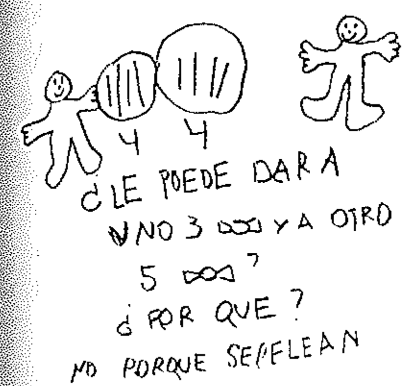
Los chicos están en condiciones de resolver problemas de reparto (equitativo o no) en los que se deba determinar cuánto corresponde a cada parte y problemas de reparto en los que se deba determinar en cuántas partes se ha efectuado el reparto, mediante diversos procedimientos, desde mucho antes de dominar recursos de cálculo. El objetivo de enfrentar a los alumnos a este tipo de problemas desde los primeros años de la escolaridad es, por una parte, que aprendan a elaborar estrategias propias de resolución de problemas cuando no tienen aún disponible un recurso económico; y por otra parte, abona al proceso de construcción del sentido de dicha operación.

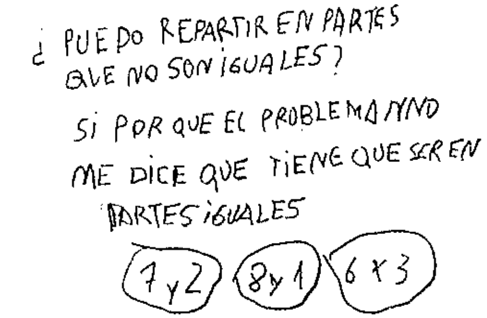
Los alumnos no sólo podrán trabajar sobre los modos de efectuar repartos, y discutir si deben ser equitativos o no, sino que, al mismo tiempo, estarán aprendiendo a resolver problemas: leer enunciados, revisarlos, transformarlos, considerar la cantidad de soluciones posibles, entre otras acciones.

Por ejemplo, en un primer año, se planteó el siguiente problema: "Un señor tiene 8 caramelos y se los da a dos niños, ¿cuántos le da a cada uno?".

La mayor parte de los niños contestó que eran 4 para cada uno. La maestra preguntó entonces si era posible darle 5 a uno y 3 a otro. Al principio, los niños comentaron que sería injusto. La docente, entonces, les propuso releer el problema para analizar si esta opción era posible "según el enunciado". Como, en este caso, no se dice nada acerca de lo equitativo del reparto, se plantea qué debería decir el enunciado del problema para que "sí o sí, los dos chicos deban recibir la misma cantidad". Los alumnos sugieren agregar al enunciado "en partes iguales".

Estas son algunas resoluciones que los niños elaboraron frente a problemas de reparto que no demandan la condición de lo equitativo:





Como se ve, los alumnos fueron capaces de resolver el problema poniendo en juego dibujos y ciertas relaciones entre los números.

Cuando el reparto debe ser equitativo, al aumentar el tamaño de los números con los que se trabaja, se requiere la elaboración de algunos recursos más pertinentes, ya que se torna muy dificultoso anticipar la cantidad que corresponderá a cada uno.

Pensar las prácticas

¿Cuáles cree que son las diferencias principales entre los siguientes problemas?

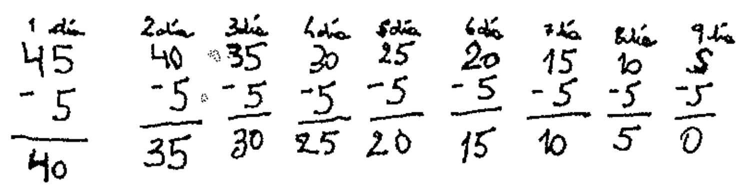
a. Se quieren repartir 42 alfajores en cajas. En cada una, se colocarán 6 alfajores. ¿Cuántas cajas se necesitan?

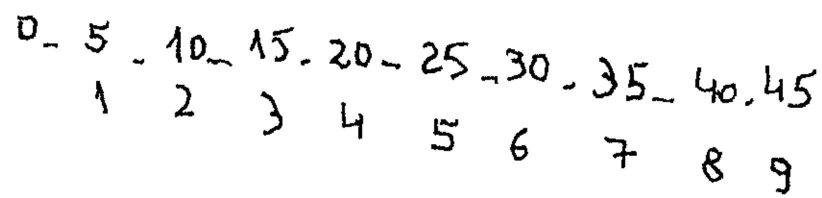
b. Se quieren repartir 42 alfajores en 6 cajas. En todas, se colocará la misma cantidad de alfajores. ¿Cuántos alfajores se pondrán en cada caja?

Hay problemas que se pueden proponer a los alumnos, como el siguiente: "Tengo $45, gasto $5 por día. ¿Para cuántos días, me alcanza?". Si bien parece ser un reparto, el valor de cada una de las partes es conocido ($5). El valor que se quiere encontrar es la cantidad de días para los cuales alcanza el total de dinero, gastando $5 por día. En consecuencia, este tipo de problemas en los cuales se interroga sobre la *cantidad de partes* resulta de naturaleza diferente de los problemas en los cuales se interroga sobre la *cantidad en cada parte.* Si los alumnos no se enfrentan a esta diferencia, no será sencillo que reconozcan la división como una poderosa herramienta para resolverlos. Y esta misma diferencia se manifiesta en la actividad anterior.

En problemas como el del último ejemplo, los datos corresponden a valores de la misma variable (en este caso, \$45 y \$5, que corresponden a la variable "cantidad de dinero"), y se busca un valor de otra variable, la cantidad de días. En cambio, si se tratara de un reparto equitativo, los datos serían de variables diferentes (\$45 y 5 días), y se debería obtener el valor de una de ellas.

Los chicos pueden resolver este tipo de situaciones, en un comienzo, apelando a diversos recursos: restas sucesivas, conteo de 5 en 5 hasta llegar a 45, como se observa en las siguientes producciones.





En ambos casos, aparece la necesidad de controlar la cantidad de días, ya que esta no surge directamente de las restas o de las sumas.

Un chico comienza haciendo restas sucesivas y, cuando llega a 30, se da cuenta de que los resultados que obtiene van disminuyendo de 5 en 5.

La riqueza en la variedad de estrategias de resolución hace que sea conveniente un trabajo colectivo del docente que tienda a socializarlas, promoviendo que los alumnos las registren en sus cuadernos,

con el objetivo de que se apropien de las distintas maneras de resolver un mismo problema. A partir de 3.º grado/año, podrán analizarse estrategias multiplicativas como alternativa a las resoluciones propuestas por los alumnos.

Otro tipo de problemas que es necesario trabajar son los que involucran situaciones de reparto donde el resto no es cero. En estos casos, se requiere una discusión sobre de qué modo debe considerarse "lo que sobra". En algunos casos, el resto es fraccionable (chocolates, líquido, etcétera); mientras que en otros, no lo es (globos, personas, etcétera). Los restos fraccionables permiten el trabajo con fracciones, simples, en los primeros años, y más complejas, a medida que se avanza en su estudio.

Para este problema planteado en un 2.º grado/año: "Un señor tiene 18 caramelos y quiere repartirlos en partes iguales para sus 4 hijos. ¿Cuántos le dará a cada uno?", una alumna realiza una partición del resto:

En general, los chicos no tienen en cuenta la posibilidad de repartir o no lo que sobra. Muchas veces, sucede que terminan efectuando repartos no equitativos. A través de una instancia de discusión, los alumnos podrán ir apropiándose de las diferentes cuestiones para tener en cuenta. Lo aprendido será fértil para resolver un nuevo problema.

Tampoco es suficiente con una sola situación para que los chicos puedan aproximarse al conocimiento que está en juego. Es necesario trabajar con una colección de problemas que apunten a los objetivos en cuestión durante varias clases.

En este capítulo, relativo en parte a la multiplicación, se han mostrado las *organizaciones rectangulares* como uno de los sentidos de la multiplicación. Ahora bien, todo problema que puede resolverse a partir de un producto posibilita generar dos problemas "asociados", que involucran una división. Si se trata de filas y columnas, la cantidad total de elementos se obtiene a partir de filas x columnas. Luego, si se conoce la cantidad total de elementos y la cantidad de filas, se obtiene la cantidad de columnas. Asimismo, el cociente entre el total y la cantidad de columnas da la cantidad de filas. Es decir, este tipo de problemas permite evidenciar, de manera explícita, la relación existente entre la multiplicación y la división, en particular, si el resto es 0. Por ejemplo, "Si se compran 75 baldosas para cubrir un patio que tiene forma rectangular; y en cada fila, se ponen 15 baldosas, ¿cuántas filas se completan?".

Para resolver este problema, los alumnos podrán apelar a dibujos o a cálculos que den cuenta de las relaciones que estuvimos mencionando: $75 \div 15 = 5$ pues $5 \times 15 = 75$.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Analice qué elementos de la cuenta de dividir es necesario considerar para resolver cada uno de los siguientes problemas.

a. Un grupo de 46 personas tiene que realizar un viaje. Se trasladarán en combis que tienen capacidad para 11 pasajeros. ¿Cuántas combis son necesarias si se llena una combi antes de habilitar otra?

b. ¿Cuántas cajas de una docena de alfajores se pueden armar con 457 alfajores?

c. Al repartir 248 cartas en partes iguales entre 15 personas, a cada una, le tocan 16. ¿Cuál es la mínima cantidad de cartas que hay que agregar para que no sobre ninguna al repartirlas?

En el primer problema, como no es posible dejar personas sin viajar, es necesario agregar uno al cociente, y una de las combis no viajará completa.

En el segundo caso, como hay que armar cajas enteras, no importa el resto, y sólo se considera el cociente.

En el tercer caso, es necesario analizar cuánto debe agregarse al resto para que el cociente aumente en una unidad.

Si los problemas que resuelven los alumnos únicamente demandan considerar el cociente de la división, existe un aspecto relativo a la construcción del sentido de este concepto que queda afuera, y no se habilita a los alumnos a que resuelvan otros tipos de problemas que requieren de un análisis del resto.

Hay otros problemas en los que interviene la división. Son aquellos en los cuales se trata de averiguar cuántas veces entra un número dentro de otro[6]. El enunciado de estos problemas no da cuenta en un principio de cómo se vinculan con la división. Es decir, la formulación de estos problemas, sus enunciados, no hacen referencia a repartos, ni a organizaciones rectangulares ni a proporciones. Sin embargo, la herramienta óptima para resolverlos sigue siendo la división, cuestión que deberá formar parte de la enseñanza.

A continuación, se analizan algunos ejemplos:

- Si hoy es lunes, ¿qué día de la semana será dentro de 1500 días?

Este problema puede resolverse contando los días de uno en uno, lo cual resultaría muy tedioso. Para poder avanzar, es necesario darse cuenta de que el día de la semana se repite cada 7 días, es decir que, cada 7 días, a partir de un lunes, será lunes. Como al dividir 1.500 por 7, se obtiene el cociente 214 y el resto 2, se puede deducir que, en 1.500, hay 214 sietes y 2 unidades más. Pensando en términos del problema planteado, al contar los días desde el lunes, 214 veces, se "cae" nuevamente en lunes. Las dos unidades representadas por el resto indican que se trata de 2 días más, es decir, miércoles.

- Si se parte del número 218; y se dan saltos para atrás de 3 en 3, ¿cuál es el número más cercano a cero al que se va a llegar?

De la misma manera que en el problema anterior, la cantidad de tres que tiene 218 indica la cantidad de saltos que se pueden dar. Al dividir 218 por 3, el cociente es 72, y el resto es 2. A partir de esto, es

[6] En algunos documentos, se los menciona con el nombre de *problemas de iteraciones*. Ver Documento de trabajo N° 4. *Actualización curricular Matemática* (1997). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección Gral. de Planeamiento. Dirección de Currículum.

posible afirmar que la máxima cantidad de saltos de 3 unidades que se pueden dar es 72. Como 218 – 72 x 3 = 2, se llega al número 2.

Es importante tener en cuenta que problemas como los anteriores forman parte de la construcción del sentido de la división y deben ser considerados en un proyecto de enseñanza de este contenido. El haber trabajado con otros sentidos de la división no necesariamente habilita a los alumnos para reconocerla como la herramienta adecuada para resolver estos problemas. Por otro lado, este tipo de problemas podrán reelaborarse a la luz del trabajo con múltiplos y divisores, dado que los restos serán las distancias a las que se encuentra un cierto número del múltiplo de otro más cercano. En particular, si en el segundo ejemplo, en lugar de 218, se parte de 219, por ser este un múltiplo de 3, se llega justo al 0.

Un nuevo tipo de problemas involucra las relaciones entre la división y la noción de *fracción*. Quizá este sea el sentido más ausente en la escuela. Se trata de problemas que permitan evidenciar que toda fracción es un cociente entre enteros. Por ejemplo: "Sin hacer la división, encuentren un número que represente el resultado de 28 ÷ 11".

Si se han abordado las relaciones entre la división y la fracción, es pertinente arribar a que 28 ÷ 11 = 28/11.

O bien: "¿Qué número multiplicado por 4 da 21?".

Hay varias maneras de resolver este problema, de las cuales, comentaremos dos:

- Si se busca un número que, multiplicado por 4 dé 21, entonces el número buscado es el cociente entre 21 y 4, o sea 21/4.
- Como 4 x 1/4 = 1, entonces (4 x 1/4) x 21 = 21.

  Luego, 4 x (1/4 x 21) = 21 o, lo que es lo mismo, 4 x 21/4 = 21.

¿*La* cuenta o *las* cuentas para dividir?

Ya hemos analizado algunos de los recursos que es posible que desplieguen los alumnos frente a la diversidad de problemas que involucran a la división: hacer repartos equitativos, analizar el resto de un reparto, tratar con organizaciones rectangulares, identificar cuántas

veces entra una cantidad en otra, etcétera. A la luz de estos problemas, los alumnos elaboran dibujos, realizan conteos, se apoyan en cálculos de sumas y restas, etcétera. La escuela es responsable de que este tipo de recursos avancen hacia otros más pertinentes, más económicos. No se espera que surjan "mágicamente". Es necesario plantear nuevos desafíos, aumentar el tamaño de los números y establecer relaciones con la multiplicación para que los alumnos puedan producir nuevos recursos de cálculo que permitan resolver problemas más complejos en el campo de la división. Para pensar en estas cuestiones, le proponemos la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Resuelva el siguiente problema, sin usar la "cuenta de dividir".

Se quieren repartir 4.184 caramelos en paquetes de 15. ¿Cuántos paquetes enteros se pueden armar?

Hay diferentes maneras de encontrar la respuesta al problema, con la condición de no usar la cuenta de dividir. Por ejemplo, analizar que, si cada paquete tiene 15 caramelos, se podría sumar 15 hasta llegar a la cantidad total de caramelos o lo más cerca posible: 15 + 15 + 15 +... No sólo hay que decidir que la suma es *una* manera de encontrar el resultado, sino que también hay que decidir cuándo "parar" de sumar y, además, controlar la cantidad de veces que se suma el 15, porque ese número es la cantidad de paquetes que se pueden armar. Es evidente que este recurso es un tanto engorroso. Pero, dados los números que intervienen, se permite buscar nuevas estrategias asociadas a "sumas reiteradas", es decir, es un camino fértil para identificar la multiplicación como un medio para elaborar nuevos modos de resolución.

Otra posibilidad es apelar a la resta, es decir, podría restarse 15 tantas veces como sea posible al total de caramelos: 4.184 – 15 – 15 –... Nuevamente, es preciso tener en cuenta que, cada 15 que se resta, corresponde a 1 paquete de caramelos. Además, hay que restar 15 hasta que no se pueda restar más por haber llegado a 0, o a un número menor que 15.

Una vez más, los valores elegidos hacen que restar también se torne arduo, por lo cual es conveniente buscar nuevos modos, entre ellos, la multiplicación, de manera tal de "resumir" la cantidad de pasos. Muchos alumnos, viendo que la cantidad de restas "unitarias" es muy grande, comienzan a restar varios 15 juntos, controlando cuántos restan.

Otra posibilidad es apoyarse directamente en la multiplicación, en particular, en aquellas multiplicaciones que estén más disponibles. Por ejemplo: si se arman 100 paquetes, se usan 100 x 15 = 1.500 caramelos. Quedan, entonces, 4.184 – 1.500 = 2.684 caramelos. Es posible armar 100 paquetes más, para lo cual se necesitan otros 1.500 caramelos. Quedan 2.684 – 1.500 = 1.184.

No alcanza para armar 100 paquetes más. Una manera de explorar cuántos se pueden armar es usar las propiedades del producto. Por ejemplo: si para 100 paquetes se usan 1.500 caramelos, para 50 se usan la mitad, 750, luego quedan 1.187 – 750 = 434 caramelos.

Para 10 paquetes, se necesitan 10 x 15 = 150 caramelos; para 20 paquetes, 300. Quedan 434 – 300 = 134 caramelos.

Si para 10 paquetes se usan 150 caramelos, en 5 paquetes, se usa la mitad, 75. Como para 3 paquetes se usan 45 caramelos, entonces para hacer 8 paquetes, se necesitan 75 + 45 = 120 caramelos. En este caso, sobran 134 – 120 = 14 caramelos.

En total, se armaron 100 + 100 + 50 + 20 + 8 = 278 paquetes; y sobraron 14 caramelos.

Este desarrollo corresponde a una división resuelta de una manera diferente del algoritmo, realizando una aproximación a través de productos que permite seguir paso a paso lo que se resuelve.

Un problema central es que las representaciones de las cuentas que se proponen en la escuela, generalmente, distan mucho de las representaciones que elaboran los alumnos. Si para resolver un problema, algunos alumnos usan sumas o restas, o se aproximan por multiplicaciones, difícilmente interpreten que la organización de la cuenta de dividir indica eso mismo que ellos están pensando, pues la cuenta de dividir esconde todos los pasos y razonamientos que podrían estar ensayando los chicos. De esta manera, vale la pena

advertir que cualquier escritura de los cálculos que proponga un docente debería, en cierta medida, respetar los modos de pensar que vienen desarrollando los alumnos.

Así, por ejemplo, la resolución mediante las aproximaciones por multiplicaciones podría adquirir alguna organización similar a las siguientes, asumiendo que no son las únicas posibles:

4.184	15
–1.500	100
2.684	
–1.500	100
1.184	
–750	50
434	
–300	+20
134	
–120	8
14	278

4.184	15
–1.500	100 + 100 + 50 + 20 + 8
2.684	
–1.500	278
1.184	
–750	
434	
–300	
134	
–120	
14	

Estas formas de organizar las cuentas de división podrían plantear muchas ventajas respecto de la escritura convencional, una de las cuales es que cada uno de los números que aparecen tiene un significado específico en el contexto del problema, accesible a quien lo aplica. Por otro lado, la forma de dividir es la misma, independientemente de la cantidad de dígitos que tengan los números.

Otra ventaja es que aquí se explicitan los cálculos realizados, mientras que en el algoritmo convencional, estos cálculos se hacen, pero se mantienen ocultos.

Para pensar un poco más acerca de la cuenta de dividir, le proponemos la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Intente fundamentar matemáticamente cada uno de los pasos que se usan para hacer una cuenta de dividir, empleando el algoritmo convencional. ¿Es posible transformar esa fundamentación en un discurso comprensible para un alumno? ¿De qué manera?

Todos nosotros hemos aprendido a dividir con el algoritmo que ahora enseñamos a nuestros alumnos. Sabemos que es preciso tener cuidado para no equivocarse y que es necesario conocer muchos casos particulares (división por una cifra, por 2, por más de 2, división entre decimales, etcétera). El dominio de todos estos recursos lleva mucho tiempo y varios años de escolaridad.

Pensemos en una división cualquiera y en nuestro "discurso" al resolverla. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 3.497 & 12 \\ \cline{2-2} 1\,09 & 291 \\ 17 & \\ 5 & \end{array}$$

En el primer paso de la cuenta, se suele decir: "Como no se puede dividir 3 en 12, entonces tomo el 34, que sí se puede dividir". Ahora bien, cierto es que, producto de las características de nuestro sistema de numeración decimal, ese "3", en realidad, representa un 3.000. ¿No se puede dividir 3.000 por 12?

Entonces se propone "tomar el 34" y tratar de encontrar un número que, multiplicado por 12, se aproxime lo más posible a 34 sin pasarlo. Decidido que es el 2, se obtiene el producto 24 (de 12 x 2) y se le resta a 34:

$$\begin{array}{r|l} 3.497 & 12 \\ \cline{2-2} -24 & 2 \\ \cline{1-1} 10 & \end{array}$$

Hasta aquí, ese "2" es, en realidad, el primer dígito del cociente, pero no sabremos hasta terminar la cuenta si representa un 2, un 20, un 200, etcétera, y por lo tanto, si el producto consecuente será 24, 240, 2.400, etcétera.

Si el resultado es 24, ¿cómo se puede validar que, para restar 24 a 3.497, lo ubiquemos de izquierda a derecha? ¿Quién se hace cargo de la contradicción entre hacer esto y lo que los chicos han aprendido del funcionamiento del algoritmo de la resta? Aun en el caso de que los alumnos realicen la resta por diferencia, es decir, no la escriban, estas preguntas siguen siendo pertinentes.

Siguiendo la cuenta, una vez obtenido el resto, hay que "bajar" un número. ¿Qué significa "bajar un número"? ¿Cómo hace un alumno para controlar la razonabilidad del resultado, si el fraccionamiento del dividendo hace desaparecer la cantidad de partida?

Claramente, hay una gran disociación entre lo enseñado acerca del sistema de numeración y de la resta, y este algoritmo. Tanto la cuenta como el discurso que la acompaña podrían contradecir, desde el punto de vista matemático, conocimientos que probablemente los alumnos disponen de años anteriores. Estas contradicciones son fuentes de numerosos errores de los chicos, quienes terminan reproduciendo un procedimiento vacío de toda posibilidad de comprensión y sentido.

Dentro de la matemática, se usan muchos algoritmos porque simplifican el trabajo. Pero los algoritmos surgen de una generalización sobre los pasos que se repiten en un procedimiento no algorítmico. Se llega al algoritmo luego de observar pasos invariantes en otras formas de resolución. Esto último permite volver a cualquier otra estrategia de resolución si, por alguna razón, el algoritmo no resulta el recurso más pertinente.

Muchas veces, al presentar directamente el algoritmo sin dar el espacio y el tiempo necesarios para ir aproximándose a él en forma progresiva, se corre el riesgo de quitarle todo sentido y de que se transforme sólo en un conjunto de pasos que se deben seguir (que bien podrían ser reemplazados por otros). Esta quizá sea una de las principales razones por las que los alumnos tienen tantos problemas para dividir. No siempre comprenden qué están haciendo, lo cual los hace perder el control. No estamos queriendo decir que no se deban enseñar los algoritmos. Decimos que sería más pertinente que surjan como consecuencia de todo un recorrido y no, como un inicio.

Para analizar un poco más esta cuestión, le proponemos la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Intente explicar qué hizo un alumno[7] que resolvió una división del modo en que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r|l} 578 & 23 \\ \hline -4 & 25 \\ 17 & \\ -6 & \\ 11 & \\ -10 & \\ 18 & \\ -15 & \\ 3 & \end{array}$$

La escritura provista por el chico no incluye todo. Intentemos dilucidar exactamente qué hizo, en términos matemáticos:

500 ÷ 20 = 20, 20 x 20 = 400 y 500 – 400 = 100

La suma entre el 100 que sobra y el 70 de 578 es 170.

20 x 3 = 60 y 170 – 60 = 110.

110 ÷ 20 = 5, 5 x 20 = 100 y 110 – 100 = 10.

La suma entre el 10 que sobra y el 8 de 578 es 18.

5 x 3 = 15 y 18 – 15 = 3.

La cantidad de implícitos que tenía el cálculo hecho por el alumno hizo que fuese muy difícil darse cuenta de si era correcto o no. Fue necesario explicitar cada uno de los cálculos y las razones por las cua-

[7] Extraído de *Pasar la posta, tomar la posta* (2006). Bs. As.: GCBA., texto elaborado por la Escuela de Capacitación Docente CePA. La publicación completa puede obtenerse en http://www.buenosaires.gov.ar/.

les se los efectuó para llegar a entender. Este mismo cálculo podría organizarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lr|l} & 578 & 23 \\ 20 \times 20 & -400 & 20 \\ & 178 & \\ 3 \times 20 & -60 & \\ & 118 & +5 \\ 20 \times 5 & -100 & 25 \\ & 18 & \\ 3 \times 5 & -15 & \\ & 3 & \end{array}$$

La elección de la actividad tenía por objetivo mostrar lo difícil que puede ser, para un alumno, comprender las características del algoritmo de la división. No explicitar los pasos usados, no escribir los ceros y, en muchos casos, no hacer las restas puede oscurecer los cálculos y quitarles el sentido matemático. La resolución termina siendo, como ya vimos, una serie de pasos que se han de seguir sin saber por qué funcionan.

Una observación que nos parece interesante enunciar es cuánto se parece la presentación del algoritmo del chico con el usado habitualmente. Pareciera que este alumno buscó expresarlo como se hace en la escuela para darle un aspecto "más correcto".

Una de las cuestiones que juegan un rol fundamental en el control de los resultados de las divisiones involucra estimar o anticipar la cantidad de dígitos del cociente. En el caso del ejemplo ya tratado: "Se quieren repartir 4.184 caramelos en paquetes de 15. ¿Cuántos paquetes enteros se pueden armar?", es posible analizar con los alumnos, antes de hacer cuentas, que:

- Si se hacen 10 paquetes, se usan 15 x 10 = 150 caramelos.
- Si se hacen 100 paquetes, se usan 15 x 100 = 1500 caramelos.
- Si se hacen 1.000 paquetes, se usan 15 x 1.000 = 15.000 caramelos.

La cantidad de caramelos era de 4.184, es decir, más de 1.500 y menos de 15.000, luego se pueden armar más de 100 paquetes y menos de 1.000. Como todos los números entre 100 y 1.000 tienen 3 dígitos, entonces la cantidad de paquetes, el cociente, es un número que indefectiblemente tendrá 3 dígitos.

Esta información es muy importante porque indica que conviene probar con, al menos, 100 como cociente. Ahora bien, se podrá avanzar, usando las propiedades del producto:

15 x 100 = 1.500
15 x 200 = 2 x 1.500 = 3.000
15 x 300 = 1.500 + 3.000 = 4.500

El número 4.500 es mayor que 4.184, luego se puede empezar con el armado de 200 paquetes. Es decir, 4.184 – 3.000 = 1.184.

Ahora se podrán hallar las decenas del cociente:

15 x 10 = 150
15 x 20 = 2 x 150 = 300
15 x 40 = 2 x 300 = 600
15 x 70 = 150 + 300 + 600 = 1.050

Al armar 70 paquetes, quedan 1.184 – 1.050 = 134 paquetes.

Finalmente, se pueden hallar las unidades:

15 x 5 = 150 ÷ 2 = 75
15 x 2 = 30
15 x 8 = 75 + 30 + 15 = 120

Quedan 134 – 120 = 14 caramelos.

La división, entonces, podría reorganizarse de la siguiente manera:

4.184	15
–3.000	200
1.184	
–1.050	70
134	
–120	+ 8
14	278

La última escritura es una "expansión" del algoritmo convencional, donde nuevamente se explicitan por separado las unidades, decenas y centenas, y las diferencias.

Como ya hemos dicho, no alcanza con explicar todo lo anterior a los alumnos. Es necesario exponerlos a una serie de problemas secuenciados que tengan por finalidad el trabajo descrito con la división.

La anticipación de la cantidad de cifras que va a tener el cociente colabora, además, para poder tener un control consciente del resultado. Sabiendo que el cociente va a tener tres cifras, si el alumno comete alguno de los errores comunes —olvidarse de "bajar" un número; no poner cero en el cociente cuando el resto es menor que el divisor (en ambos casos, obtiene un resultado de dos cifras); estimar mal el número del cociente, obtener un resto mayor que el divisor y volver a dividirlo, y obtener un cociente de cuatro cifras, etcétera— la situación misma le demostrará que ha cometido un error.

En síntesis, se trata de ofrecer a los alumnos la posibilidad de que, al resolver toda una clase de problemas de división, puedan establecer nuevas relaciones en función de los datos involucrados, el tamaño de los números, las características del sistema de numeración, sus conocimientos sobre la suma, la resta y la multiplicación como herramientas que se pondrán en juego para elaborar nuevos modos de encontrar resultados y de organizarlos.

La división entera como objeto de reflexión

El concepto de *división entera*[8] no sólo es de gran importancia dentro de la matemática, sino también en la didáctica, aunque algunos de los aspectos de su tratamiento exceden el Segundo Ciclo y deberán reservarse para más adelante.

De todos modos, queremos presentar algunos ejemplos que intentan mostrar nuevas relaciones asociadas a la división.

- Encuentren una división en la que el divisor sea 25, el cociente, 14; y el resto, 23. ¿Cuántas divisiones se pueden encontrar?

Usando la relación $D = d \times c + r$[9] es posible hallar el dividendo. $D = 25 \times 14 + 23 = 373$, y es la única cuenta de dividir que se puede hallar.

[8] Dados dos números llamados *dividendo* y *divisor*, existen dos únicos números llamados *cociente* y *resto*, tales que dividendo = cociente x divisor + resto, donde el resto es mayor o igual que cero y menor que el divisor. La relación anterior recibe el nombre de *división entera*.

[9] D = dividendo; d = divisor; c = cociente; r = resto.

- Encuentren una división en la que el divisor sea 25; y el cociente, 14. ¿Cuántas divisiones se pueden encontrar?

Si no se da el resto, es necesario identificar que, en este caso, puede tomar cualquier valor entre 0 y 24, lo que da lugar a 25 divisiones diferentes que verifican las condiciones que se plantean en el problema:

$$D = 25 \times 14,\ \ D = 25 \times 14 + 1,\ \dots,\ D = 25 \times 14 + 24$$

- Encuentren una división en la que el divisor sea 25; y el resto, 23. ¿Cuántas divisiones se pueden encontrar?

Para hallar el dividendo, es necesario conocer el valor del cociente. Como no hay ninguna restricción para este, significa que puede tomar cualquier valor entero no negativo:

$$D = 25 \times 0 + 23,\ D = 25 \times 1 + 23,\ D = 25 \times 2 + 23,\ \dots$$

Luego, hay infinitas divisiones que verifican las condiciones dadas.

- Encuentren una división en la que el cociente sea 14; y el resto, 23. ¿Cuántas divisiones se pueden encontrar?

En este caso, es necesario conocer el valor del divisor. Como el resto es 23, el menor valor posible para él es 24, y no hay un valor máximo para él. Algunas posibilidades para el dividendo son:

$$D = 14 \times 24 + 23,\ D = 14 \times 25 + 23,\ D = 14 \times 26 + 23\ \dots$$

- Sin hacer la cuenta de dividir, determinen el resto de dividir el número 18 x 15 x 4 + 7 por 12.

Para resolver este problema sin necesidad de resolver la división, es necesario "leer" la expresión dada, es decir, obtener de ella la información necesaria. Si se está dividiendo por 12, el dividendo debería poder expresarse como $12 \times c + r$, a partir de donde podrá indicarse cuál es el resto.

Si bien no hay un 12 en el primer término de 18 x 15 x 4 + 7, es posible obtenerlo al descomponer 18, por ejemplo, como 3 x 6. Entonces:

$$18 \times 15 \times 4 + 7 = (3 \times 6) \times 15 \times 4 + 7 = \mathbf{12 \times (6 \times 15) + 7}$$

La última escritura permite ver que, al dividir el número dado por 12, el cociente es 6 x 15; y el resto, 7.

La multiplicación, la división y el uso de la calculadora

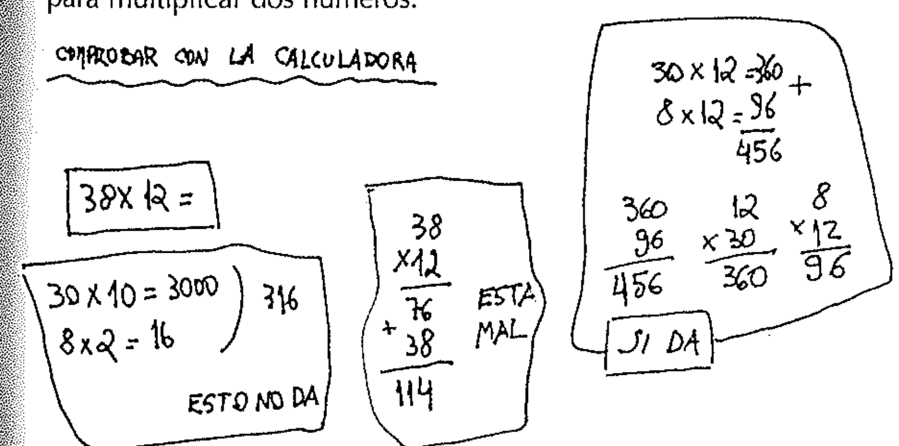
La calculadora es una herramienta sumamente útil para el trabajo matemático que se propone en las aulas. Sin embargo, todavía su uso provoca profundas discusiones en la escuela y fuera de ella. Muchos docentes, y también muchos padres, temen que si los chicos utilizan la calculadora "dejen de razonar" para hacer sus tareas.

Pensamos que no se puede renegar de ella debido a su extendido uso social y, desde el punto de vista didáctico, es posible usarla para profundizar en los conocimientos que los alumnos elaboran.

Por supuesto, no nos referimos a un uso sin ningún tipo de condiciones. Por ejemplo, no sería pertinente en el momento en que se intenta enseñar a realizar ciertos cálculos. Pero cuando estos no son el objetivo de la clase, especialmente con aquellos problemas que requieren de varios pasos y donde la actividad central del alumno es tomar decisiones acerca de qué cálculos hacer, es posible usar la calculadora.

También es interesante utilizarla como un medio de control de anticipaciones. Por ejemplo, frente a una colección de cálculos en los que hay que estimar sus resultados, la calculadora puede emplearse para corroborarlos.

Hay otro tipo de problemas de cálculo para resolver con la calculadora que exigen utilizar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Por ejemplo, este trabajo de un alumno de tercer grado, en el que se comprueba la validez o no de ciertas descomposiciones para multiplicar dos números:



La calculadora sólo indica si el resultado es correcto o no. No da información respecto de las razones por las cuales está bien o mal, lo cual será tarea del alumno y de la clase con la participación del maestro.

Les presentamos, a modo de ejemplo, otros problemas para trabajar con la calculadora, que permiten pensar en las propiedades, tanto para tratar la multiplicación como la división:

- ¿Cómo se puede obtener el resultado de 25 x 20 con una calculadora, si no funciona la tecla del 0?
- ¿Cómo se puede obtener el resultado de 6 x 5 x 7 x 9 x 10 utilizando una sola vez la tecla x?
- ¿Cómo harías la cuenta 2.088 ÷ 8 con una calculadora a la que no le funciona la tecla del 8?
- ¿Cómo se puede hallar el cociente y el resto de la división 3.543 ÷ 26 usando una calculadora?
- Una persona hizo 2.844 ÷ 18, pero en realidad tenía que hallar 2.844 ÷ 9. ¿Cómo puede obtener este resultado sin borrar el primero obtenido?

Esta colección es solo una muestra[10] de los problemas que permiten hacer funcionar la calculadora en situaciones que propician el profundizar los conocimientos que se están trabajando. Se trata de que los alumnos puedan apoyarse en esta herramienta para avanzar en la identificación de nuevas propiedades, nuevas relaciones, nuevos recursos de cálculo, y también, para disponer de la calculadora a fin de hacer cálculos, sin perder el control de los resultados que van obteniendo. Se espera que los alumnos la incorporen, sin perder de vista sus alcances y sus límites.

En este capítulo, hemos querido mostrar las diferentes clases de problemas que podrían dar sentido a la multiplicación y a la división, así como brindar un abanico de recursos de cálculo asociados, de alguna manera, a los problemas. Este tipo de trabajo, sabemos, requiere de mucho tiempo. Pero es más necesaria la comunicación fluida entre los docentes de los diferentes grados, de manera tal de poder dar continuidad a un modo de pensar la matemática y de hacerla en función de estas operaciones.

El recorrido aquí propuesto es uno posible, pero no es el único.

[10] Para más situaciones y actividades, se sugiere la lectura del Documento N.° 6 *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB* (2001). Bs. As.: Dirección de Educación Gral. Básica. Gabinete Pedagógico Curricular. Matemática

CAPÍTULO 5

El trabajo escolar en torno a las fracciones

Agradecemos a la profesora Mónica Urquiza por sus aportes para elaborar este capítulo.

Sobre el sentido de las fracciones

El estudio de los números racionales presenta una complejidad cuya elaboración ocupa un lugar central en la escuela primaria.

En primer lugar, abordar un tipo de práctica que genere trabajo matemático en torno a las fracciones implica pensar en qué tipo de problemas funciona este objeto matemático. Hacer evolucionar los conocimientos que los alumnos tienen acerca de estos números se relaciona no sólo con invitarlos a resolver todo tipo de situaciones donde distintos usos del concepto muestren sus diferentes aspectos, sino que contribuye, además, en el despliegue de un modo de trabajo propio de la disciplina que hemos enunciado en diferentes capítulos de este libro.

Para iniciar el abordaje de este campo de números, nos parece pertinente enumerar algunos de los diferentes tipos de situaciones en las cuales los números racionales resultan herramientas óptimas[1]:

- Permiten expresar el resultado de un reparto equitativo y, en consecuencia, quedan asociados al cociente entre números naturales.

[1] Documento N.° 4. *Fracciones* (2001). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. (Disponible en www.buenosaires.gov.ar).