La calculadora sólo indica si el resultado es correcto o no. No da información respecto de las razones por las cuales está bien o mal, lo cual será tarea del alumno y de la clase con la participación del maestro.

Les presentamos, a modo de ejemplo, otros problemas para trabajar con la calculadora, que permiten pensar en las propiedades, tanto para tratar la multiplicación como la división:

- ¿Cómo se puede obtener el resultado de 25 x 20 con una calculadora, si no funciona la tecla del 0?
- ¿Cómo se puede obtener el resultado de 6 x 5 x 7 x 9 x 10 utilizando una sola vez la tecla x?
- ¿Cómo harías la cuenta 2.088 ÷ 8 con una calculadora a la que no le funciona la tecla del 8?
- ¿Cómo se puede hallar el cociente y el resto de la división 3.543 ÷ 26 usando una calculadora?
- Una persona hizo 2.844 ÷ 18, pero en realidad tenía que hallar 2.844 ÷ 9. ¿Cómo puede obtener este resultado sin borrar el primero obtenido?

Esta colección es solo una muestra[10] de los problemas que permiten hacer funcionar la calculadora en situaciones que propician el profundizar los conocimientos que se están trabajando. Se trata de que los alumnos puedan apoyarse en esta herramienta para avanzar en la identificación de nuevas propiedades, nuevas relaciones, nuevos recursos de cálculo, y también, para disponer de la calculadora a fin de hacer cálculos, sin perder el control de los resultados que van obteniendo. Se espera que los alumnos la incorporen, sin perder de vista sus alcances y sus límites.

En este capítulo, hemos querido mostrar las diferentes clases de problemas que podrían dar sentido a la multiplicación y a la división, así como brindar un abanico de recursos de cálculo asociados, de alguna manera, a los problemas. Este tipo de trabajo, sabemos, requiere de mucho tiempo. Pero es más necesaria la comunicación fluida entre los docentes de los diferentes grados, de manera tal de poder dar continuidad a un modo de pensar la matemática y de hacerla en función de estas operaciones.

El recorrido aquí propuesto es uno posible, pero no es el único.

[10] Para más situaciones y actividades, se sugiere la lectura del Documento N.° 6 *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB* (2001). Bs. As.: Dirección de Educación Gral. Básica. Gabinete Pedagógico Curricular. Matemática.

CAPÍTULO 5

El trabajo escolar en torno a las fracciones

Agradecemos a la profesora Mónica Urquiza por sus aportes para elaborar este capítulo.

Sobre el sentido de las fracciones

El estudio de los números racionales presenta una complejidad cuya elaboración ocupa un lugar central en la escuela primaria.

En primer lugar, abordar un tipo de práctica que genere trabajo matemático en torno a las fracciones implica pensar en qué tipo de problemas funciona este objeto matemático. Hacer evolucionar los conocimientos que los alumnos tienen acerca de estos números se relaciona no sólo con invitarlos a resolver todo tipo de situaciones donde distintos usos del concepto muestren sus diferentes aspectos, sino que contribuye, además, en el despliegue de un modo de trabajo propio de la disciplina que hemos enunciado en diferentes capítulos de este libro.

Para iniciar el abordaje de este campo de números, nos parece pertinente enumerar algunos de los diferentes tipos de situaciones en las cuales los números racionales resultan herramientas óptimas[1]:

- Permiten expresar el resultado de un reparto equitativo y, en consecuencia, quedan asociados al cociente entre números naturales.

[1] Documento N.° 4. *Fracciones* (2001). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. (Disponible en www.buenosaires.gov.ar).

- Son indispensables en el momento de determinar una medida, a partir de lo cual se establece una relación con una unidad de medida.
- Dan cuenta de una relación de proporcionalidad directa (en términos de escalas, porcentajes, velocidad, constante de proporcionalidad, etcétera).
- Habilitan a establecer relaciones entre cantidades enteras y las partes en que pueden ser subdivididas, así como entre dichas partes y la cantidad entera.

En segundo lugar, un trabajo escolar que aborde este complejo campo numérico debe tener en cuenta los obstáculos para su comprensión, que se generan a partir del conocimiento que los alumnos tienen sobre los números naturales. Esta ruptura se vincula, fundamentalmente, con un cambio en la representación de número que tienen los niños hasta el momento. En efecto, ellos deben construir nuevas ideas; por ejemplo, que un número puede ser escrito de diferentes modos: una fracción, un decimal, un porcentaje, una razón. Además, algunas certezas ya construidas con los números naturales se verán cuestionadas: los números no tienen "siguiente", la multiplicación de dos números no siempre es mayor que cada uno de los factores, etcétera. Para superar estos obstáculos, muchas veces observados a partir de los errores que los niños producen, se deben generar actividades que evidencien las diferencias de funcionamiento de ambos conjuntos numéricos, así como la posibilidad de confrontar las hipótesis que los niños hacen acerca de estos.

> ... Es necesario poner en relación lo que los alumnos saben de los números naturales y de sus propiedades con un nuevo campo de números que tiene sus propias leyes. Promover relaciones numéricas genera distintos aspectos del trabajo matemático y permite profundizar entre distintos objetos matemáticos...[2].

En tercer lugar, un tratamiento escolar de los números racionales que se haga cargo de los aspectos mencionados exige pensar posibles

[2] Sadovsky, P. (coord.), C. Lamela y D. Carrasco (2005): *Fracciones y números decimales. Apuntes para su enseñanza*. Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula.

modificaciones al modo en que ese tratamiento se ha concebido durante años. Organizar los contenidos por los tipos de problemas que abarcan los sentidos del concepto ofrece una respuesta en esta dirección por varios motivos. Un problema para resolver será un contexto que facilite el surgimiento de conceptos en forma simultánea, "asuntos" que anteriormente aparecían distribuidos en forma diferente. Dichos conceptos serán tratados en el contexto en que aparecen, y este brindará pistas para que los alumnos puedan estudiarlos. Progresivamente, se retomarán las mismas nociones en otros problemas, otros contextos, ellas serán re-trabajadas, descontextualizadas y formalizadas. Tratar juntas algunas cuestiones en un contexto particular permitirá el estudio de las fracciones como parte de un conjunto amplio de relaciones que se volverán a encarar con el tiempo.

> ... Tratar cada una de estas nociones en forma aislada puede ser en el momento más fácil para los alumnos, pero al ser también más superficial se torna menos duradera. Menos duradera porque olvidan fácilmente aquello que no aparece entramado en una organización donde las distintas nociones que componen un campo de conceptos se relacionan unas con otras[3].

Para pensar en estas cuestiones, le proponemos realizar la siguiente actividad, teniendo en cuenta que algunas de las situaciones que se plantean se retomarán durante el desarrollo del capítulo:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Los siguientes ejemplos presentan algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos, frente a diferentes situaciones, luego de haber recorrido algunos años de trabajo con los números racionales. Intente encontrar una explicación para cada uno de ellos:

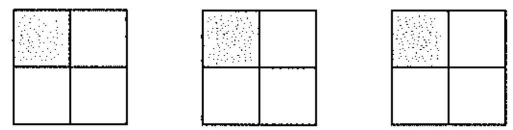
a. Juan comió $\frac{1}{2}$ pizza; y Alberto, $\frac{1}{3}$, ¿quién comió más pizza?

Respuesta: Como $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, Alberto es quien comió más.

[3] Ídem.

b. Se quieren repartir 3 chocolates entre cuatro niños, de manera que cada uno reciba la misma cantidad y que se reparta todo el chocolate. ¿Cuánto chocolate recibe cada niño?

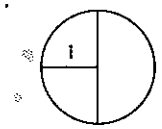
Nota: Durante la resolución, algunos alumnos realizan este esquema de representación del problema:



Respuesta: Luego de realizar este esquema, dicen: $\frac{3}{12}$.

c. Los alumnos resuelven la suma $\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ del siguiente modo: $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{8}{11}$

d. Indicar qué parte del círculo representa la región señalada con el número 1.



Respuesta: $\frac{1}{3}$

e. Encuentren con la calculadora una cuenta cuyo resultado sea 3,2 sin apretar la tecla de la coma.

Respuesta: Hay que hacer $3 \div 2$ con la calculadora.

f. Ante un problema como el siguiente: "Se quieren repartir 21 chocolates entre 4 chicos, de manera que todos coman la misma cantidad y no sobre nada de chocolate. Para ello, se hizo la cuenta siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array}$$

Mirando la cuenta, ¿podés decir cuánto le toca a cada chico?".

Respuesta: En general, los alumnos no pueden responder.

g. Buscá un número que, multiplicado por 4, dé como resultado 7.

Respuesta: No hay ningún número que, multiplicado por 4, dé como resultado 7.

h. Buscá una fracción entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$.

Respuesta: No hay ninguna. El siguiente de $\frac{3}{5}$ es $\frac{4}{5}$.

i. Indiquen qué fracciones de las que se presentan a continuación son equivalentes: $\frac{6}{9}$ $\frac{16}{24}$ $\frac{12}{18}$ $\frac{24}{36}$ $\frac{10}{13}$

Respuesta: $\frac{6}{9}$ $\frac{12}{18}$ $\frac{24}{36}$ $\frac{10}{13}$

Algunos de los errores que se propone analizar en la actividad anterior tienen que ver con la complejidad del contenido. Pero podría pensarse que la enseñanza promueve otros. Por ejemplo, en el caso **b.** En varias oportunidades, desde la escuela y en algunos libros de texto, se presenta una definición de *fracción* asociada a una representación gráfica, a la cual se le anexa un discurso que incluye expresiones similares a la siguiente: "... la cantidad de partes sombreadas forman el numerador, y la cantidad total de partes forman el denominador...".

Esta idea funciona perfectamente para los alumnos que cometen el error descrito en el ejemplo: cuentan la cantidad de partes (son 12) y cuentan la cantidad de partes sombreadas (son 3). Respuesta: 3/12 sin poder tener en cuenta que el entero no es 1, sino que son 3 enteros.

Sobre la aparición de las fracciones en el aula

Para seguir elaborando estas cuestiones, le proponemos que responda a las siguientes preguntas:

Pensar las prácticas

a. ¿Con qué tipo de problemas aparecen las fracciones en el Segundo Ciclo?

b. ¿Qué conocimientos de los que funcionan con los números naturales seguirán siendo válidos con las fracciones y cuáles no?

A continuación, presentamos algunos problemas, pertinentes para un alumno de 4.° grado/año, y el análisis didáctico que los acompaña. Le proponemos que los pruebe con sus alumnos.

- Resolvé los siguientes problemas. En los casos en que puedas, seguí repartiendo lo que te sobra.
  a. Se reparten 17 lápices entre 4 niños, todos reciben la misma cantidad. ¿Cuántos lápices le tocan a cada uno?
  b. Se reparten 17 chocolates entre 4 niños, todos reciben la misma cantidad. ¿Cuántos chocolates le tocan a cada uno?
  c. Se quiere cortar una cinta de 18 m en 4 partes iguales. ¿Cuál será la longitud de cada parte?
  d. Cuatro amigas ganaron $18 vendiendo pulseritas que ellas habían confeccionado. ¿Cuánto le corresponde a cada una si todas ganan lo mismo?

En algunos de estos problemas, donde se propone un reparto equitativo, lo que sobra no siempre puede seguir repartiéndose, esto depende de las magnitudes que se pongan en juego. Por ejemplo, en el problema de los lápices (**a.**), por más que sobren, no podrán dividirse los lápices entre los niños; mientras que en el caso de los chocolates (**b.**), sí tienen posibilidades de repartir los chocolates que sobran, y tiene sentido hacerlo.

Para el caso del problema **c.**, lo que sobra del reparto son "2", que corresponden a 2 metros de cinta que podrán repartirse entre las 4 partes, resulta así 1/2 metro más para cada una.

Pero en el caso del problema **d.**, en que se juntan 18 pesos entre 4 amigas, si ponen partes iguales, los "2" que sobran son pesos que, repartidos entre 4, serán 50 centavos para cada una. En ambos casos, será necesario analizar con el grupo de alumnos cuáles son las magnitudes que se ponen en juego, aunque aún no se mencione el término "magnitud".

Cuando lo que sobra puede seguir repartiéndose, el recurso para saber cuánto le corresponde a cada uno es la división entre dos números naturales, pero este conjunto numérico es insuficiente para dar la solución.

Por ejemplo, para resolver el problema **b.**, en el que sobra 1 chocolate para repartir entre 4 niños, generalmente, los alumnos realizan dibujos que muestran los distintos repartos. Parten los chocolates y aparecen los pedacitos, ya que dirán que es necesario dividir el chocolate en 4 partes iguales. Esta resolución será una oportunidad para que el

docente explique que esa cantidad se llama 1/4. Se define entonces que 1/4 es una cantidad tal que 4 veces esa cantidad equivale a 1.

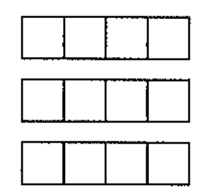
Del mismo modo, y apoyado en los otros repartos, el docente podrá definir que 1/3 es una cantidad tal que entra 3 veces en el entero, y podrá hacer el mismo análisis con 1/8 y con 1/5.

> Apoyados en estos y otros ejemplos, el docente define desde un primer momento que, en líneas generales, una fracción se denomina $1/n$ cuando n partes como estas equivalen a un entero[4].

Aparece otra definición de *fracción*, y esto sucede después de resolver problemas que le dan sentido. Se apunta a que los alumnos identifiquen la fracción como el resultado exacto de la división entre números naturales.

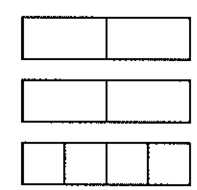
Estas actividades establecen una relación entre la división de números naturales y las fracciones, y posibilitan comenzar un entramado conceptual que la gestión docente deberá profundizar y sostener.

Si en el problema **b.**, la cantidad de chocolates para repartir hubiera sido 17 entre 4 niños, habrían sobrado 3. Los alumnos, cuando se ven enfrentados a realizar repartos equitativos donde el resto es mayor que 1, suelen representar los repartos de los 3 chocolates para los 4 niños de la siguiente manera:



Parten todos los chocolates en 4 partes y le dan 1/4 a cada niño. O sea que cada niño recibe los 3 pedazos de 1/4.

Otra posibilidad es realizar un reparto como el siguiente:



[4] *Diseño Curricular* (2005). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación.

En este segundo reparto, parten 2 chocolates por la mitad y el tercer chocolate en 4 partes, así cada niño recibe 1/2 y 1/4.

Es importante que se haga una puesta en común de los distintos repartos que los alumnos hayan propuesto, y que se realice un análisis de todos ellos.

A través de este análisis, este problema, que comenzó siendo un problema de reparto, se transformará en un problema de equivalencias. Lo fundamental entonces será comenzar a discutir dicha equivalencia entre las distintas maneras de representar un mismo reparto, es decir, equivalencias entre los diferentes modos de representar una misma cantidad. Así se espera que sea objeto de este debate que 3 pedazos de 1/4 es lo mismo que 1/2 más 1/4.

Destaquemos la dificultad que implica para los niños enfrentarse, por primera vez, al hecho de escribir un número de distintas maneras y de que todas ellas representen la misma cantidad.

¿A qué nos referimos cuando hablamos de *cálculo mental* en el aula, a propósito de las fracciones?

Los números naturales involucrados en los problemas de reparto se han manifestado insuficientes para responder a algunas situaciones, por ejemplo, a la imposibilidad de expresar cuánto chocolate le toca a cada niño cuando se debe repartir 1 chocolate entre 4. Han aparecido en la clase de Matemática estos nuevos números, y la clase ya no es la misma de antes. ¿Cuál es el panorama? Resulta que estos números no sólo se van a comparar, ordenar y que se operará con ellos, sino que además, resulta que pueden escribirse de distintas maneras. Se vuelve necesaria la toma de decisiones didácticas que permitan ayudar a los niños a abordar esta "revolución científica". El trabajo sobre el cálculo mental se convierte en una poderosa herramienta que permite enriquecer el conjunto de relaciones sobre las fracciones y, a la vez, ayuda a sostener el tema de una manera más sólida.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

a. ¿Qué clase de conocimientos se podrían abordar desde el cálculo mental con fracciones?

b. ¿Cómo se podría relacionar el cálculo mental con los algoritmos propios de los números racionales?

c. ¿De qué modo puede el trabajo con el cálculo mental sobre este campo numérico hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos, en particular, de los niños con mayores dificultades?

Primeramente, recordemos que con "cálculo mental" nos referimos a un cálculo reflexionado[5], en el que se conjugan los distintos procedimientos que los alumnos consideran más convenientes para cada situación, basados en las propiedades de las operaciones y en los resultados disponibles en su memoria. Es un cálculo que no necesariamente prescinde de la escritura y que se sostiene en el análisis de las relaciones numéricas, a diferencia del cálculo algorítmico. En efecto, este se basa en la aplicación de reglas que aseguran un resultado certero, pero que, una vez automatizado, instala una forma de operar que no tiene en cuenta las relaciones numéricas ni los resultados anteriores de que se dispone.

El trabajo con el cálculo mental sostenido a largo plazo permite que los alumnos tengan un amplio repertorio de estrategias y no queden sujetos a una sola forma de resolver un problema. Para pensar en estas cuestiones, le proponemos la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Identifique qué propiedades se ponen en juego en la resolución de los problemas siguientes:

a. Cálculo del doble de la fracción $\frac{1}{3}$.

b. Cálculo de la mitad de la fracción $\frac{1}{6}$.

Una vez que haya resuelto los ítems anteriores, elija otra fracción en la que el numerador sea distinto de 1 y actualice el análisis para ambos problemas.

[5] Ver en este libro el tratamiento relativo al cálculo mental en el capítulo 3, bajo el título "Acerca del cálculo".

El cálculo del doble o de la mitad son buenos ejemplos para ver cómo se identifican las relaciones y cómo se construyen distintos modos de resolución que será conveniente someter a una discusión colectiva. El espacio de comparación de procedimientos será interesante en tanto se plantee la equivalencia entre los distintos procedimientos y, a la vez, se discuta la validación de estos. Por ejemplo, para calcular el doble de 1/3, se puede hacer 1/3 + 1/3 = 2/3, que es lo mismo que 2 x 1/3. Si para la segunda parte se elige, por ejemplo, 4/3, se puede pensar así: como el doble de 1/3 es 2/3, y además 4/3 es 4 veces 1/3, entonces el doble de 4/3 es 4 veces el doble de 1/3, es decir: 8/3. Más tarde, este tipo de razonamientos contribuirá a la fundamentación de estrategias para multiplicar fracciones. Además, las regularidades que aparecen, por ejemplo, ante la instancia de que, para calcular el doble de una fracción se duplica el numerador y se mantiene el denominador, aporta a la producción de un cálculo memorizado y pasa a formar parte de aquel mencionado repertorio de cálculo mental. Para calcular la mitad de 1/6, se puede comenzar argumentando así: como 6 de 1/6 hacen un entero, la mitad será una parte de modo que entre 12 veces en un entero. Entonces, la mitad de 1/6 es 1/12.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Explicite las relaciones numéricas que usted crea que se ponen en juego en la resolución de cada uno de los siguientes problemas.

a. ¿Cuánto le falta a $\frac{3}{5}$ para llegar a 2?

b. ¿Entre qué enteros está $\frac{13}{5}$?

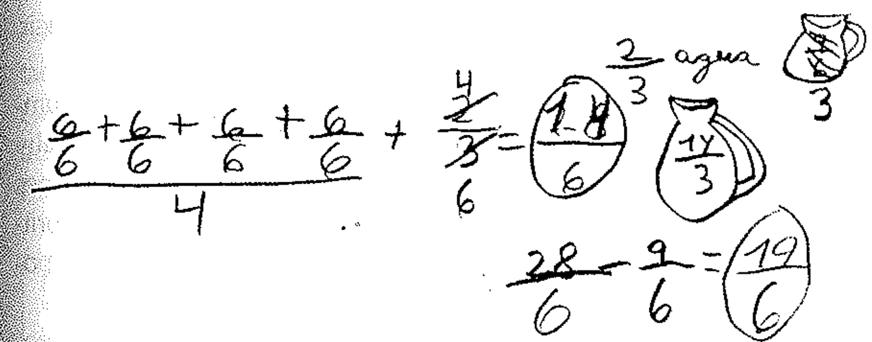
c. Un bidón tiene capacidad para 4 y $\frac{2}{3}$ litros de agua. Si en el bidón hay $\frac{9}{6}$ litros, ¿cuánta agua debo agregar para llenarlo?

Con el problema **a.**, se busca que el alumno establezca las distintas relaciones entre las fracciones y uno o más enteros. Por ejemplo, para obtener los 7/5 que hacen falta para llegar a 2, el alumno puede pensar así: a 3/5 le faltan 2/5 para llegar a 5/5, es decir, 1 entero; y

como necesita 1 entero más, que equivale a 5/5, entonces la respuesta es 2/5 más 5/5 ó 1 y 2/5.

En el problema **b.**, se pide ubicar 13/5 entre enteros. El alumno puede utilizar como recurso que 13/5 es igual a 10/5 + 3/5, y como con 5 de 1/5 arma 1 entero y tiene 10 de 1/5 y algo más, o sea es mayor que 2 enteros le faltan 2/5 para llegar a 15/5, es decir, a 3 enteros.

Para resolver el problema **c.**, un alumno escribió lo siguiente:



Podemos advertir que este chico expresa los 4 enteros como sumas de sextos, y cuando escribe 2/3, decide que necesita sextos y no, tercios, por lo que expresa el equivalente a 2/3 en sextos, o sea, 4/6, y luego suma, por lo que obtiene 28/6.

Además, puede emplearse el cálculo mental como una herramienta de control, donde no necesariamente el procedimiento utilizado es el más económico, sino que da cuenta de un recorrido personal a partir de los conocimientos que el alumno identifica como pertinentes para dicha situación.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Describa la actividad matemática que realiza al resolver los siguientes problemas.

a. ¿Por cuánto hay que multiplicar a 6 para obtener 1?

b. ¿Por cuánto hay que multiplicar a $\frac{1}{7}$ para obtener 3?

Este tipo de actividades donde el entero se toma como "punto de apoyo" favorecen la utilización posterior del cálculo mental y apelan a continuar elaborando la definición de *fracción*, que ya fue explicitada en la segunda actividad de este capítulo, donde se establece que: n veces $1/n$ es equivalente a 1.

Por ejemplo, para resolver la pregunta **b.**, resultará útil apoyarse en que, con 7 porciones de 1/7, se obtiene el entero, y como la cuestión es llegar a 3 enteros, entonces habrá que multiplicar también por 3. En definitiva, a 1/7, hay que multiplicarlo por 7 y por 3, es decir, con 21 porciones de 1/7, obtendremos los 3 enteros.

Por otra parte, hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos sobre estos números implica un interjuego de cálculos mental y algorítmico. El trabajo con el primero apunta a elaborar las razones que fundamentan los mecanismos de funcionamiento de los algoritmos y, también, permite reflexionar sobre aquellas; a su vez, disponer de los algoritmos enriquece la posibilidad del cálculo mental.

Además, hacer que los niños trabajen con los números favorece la apropiación de estos conceptos, en especial, por parte de quienes tienen más dificultades. En efecto, para estos chicos, el trabajo de producción de estrategias, que el maestro ha planificado intencionalmente, implica acceder a formas de resolver que otros alumnos elaboran por su cuenta y que ellos, aisladamente, quizás no podrían producir. Además, el cálculo mental les permite anticipar y controlar el resultado obtenido por un método convencional, el que les insume más tiempo para incorporar, el que no recuerdan fácilmente o por el que se equivocan, y ante lo cual, no saben cómo seguir.

Finalmente, la actividad matemática desplegada al hallar un procedimiento, confrontar distintas estrategias, al analizar su validez, todo esto favorece que los niños elaboren la ruptura que deben realizar con los conocimientos que ya tienen sobre los números naturales, al "meterse" en el funcionamiento de este nuevo conjunto numérico: los números racionales.

Otra vuelta sobre las fracciones equivalentes

Desde los primeros problemas, las fracciones aparecen como números con características propias, diferentes de las de los números naturales. Entre ellas, una misma cantidad puede escribirse de formas distintas. Involucrar a los alumnos en la resolución de una variedad de situaciones y con una atención explícita y sostenida del docente a propósito de esta propiedad contribuye a su internalización.

La reflexión, la discusión y el análisis de un conjunto de relaciones entre dos o más fracciones equivalentes da paso tanto a la fundamentación posterior del algoritmo que dice que, para encontrar dos fracciones equivalentes, se puede multiplicar o dividir el numerador y denominador por el mismo número natural, como a sus limitaciones. Para pensar estas cuestiones, le proponemos la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Reflexione sobre qué argumentos pueden producir los alumnos para resolver estas situaciones.

a. José quiere comprar $\frac{1}{2}$ kg de pan, pero en la panadería quedan solamente bolsitas de $\frac{1}{4}$ kg y de $\frac{1}{8}$ kg. ¿Cuántas bolsitas tiene que comprar?

b. Camila dice que, si reparte una pizza entre 4 personas, cada una come lo mismo que si se repartieran 2 pizzas entre 8. ¿Están de acuerdo? Expliquen por qué.

c. Ernesto dice que comió $\frac{3}{5}$ de chocolate, y Juan dice que comió $\frac{6}{10}$ de un chocolate igual al de Ernesto. ¿Es cierto que los dos comieron la misma cantidad?

d. Escriban tres fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$.

e. Ana dice que, si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número natural, la fracción que se obtiene como resultado es equivalente a la original. ¿Les parece correcto lo que dice Ana? ¿Por qué?

f. Justificar cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{2}{10}$: $\frac{6}{30}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{12}$.

Dadas dos fracciones, ¿cuándo podemos asegurar que son equivalentes? Una respuesta posible es que dos fracciones son equivalentes cuando, a pesar de estar escritas en forma diferente, representan el mismo número, es decir, expresan la misma cantidad.

Una posibilidad de pensar el problema **c.** es razonar así: Ernesto partió el chocolate en 5 partes iguales y comió 3; en cambio Juan partió el chocolate en 10 partes iguales, el doble que Ernesto, y entonces comió el doble, es decir, 6 partes. Entonces, los dos comieron la misma cantidad.

Cuando, en el aula, se realiza una actividad como la planteada en el problema f., es muy común que los alumnos no identifiquen 3/15 como equivalente a 2/10. El tratamiento de la fracción equivalente donde se privilegia el algoritmo de multiplicar numerador y denominador por un mismo número puede producir este tipo de error. Basándose en dicho concepto, un alumno intentaría buscar por qué numero natural se puede multiplicar a 2 para obtener 3 y, al no encontrarlo, concluir que 3/15 y 2/10 no son fracciones equivalentes.

Una forma de resolver este problema consiste en advertir que 3/15 es equivalente a 1/5, y que 2/10 también lo es, lo que muestra que 3/15 y 2/10 son equivalentes entre sí. Otra posibilidad es poner en evidencia que, tanto en 2/10 como en 3/15 la relación entre cada numerador y su respectivo denominador es la misma: 2 entra cinco veces en 10, así como 3 entra cinco veces en 15.

Por último, suele suceder que los alumnos identifiquen 4/12 como equivalente a 2/10, cuando no lo es. Es importante analizar con ellos que, al sumar un mismo número al numerador y al denominador de una fracción, no se obtiene una fracción equivalente a la original.

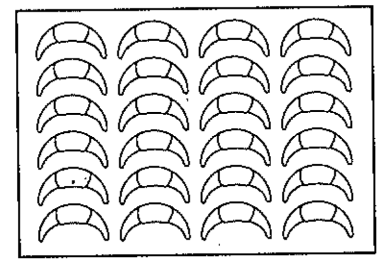
Cuando el entero es un grupo de objetos

Para reflexionar sobre este tema, le proponemos la siguiente actividad:

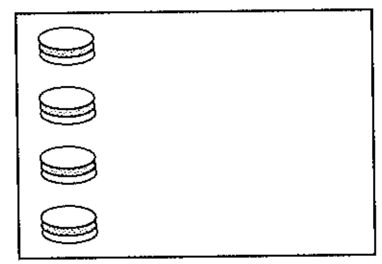
Pensar las prácticas

Los siguientes problemas involucran el cálculo de una fracción de una cantidad, es decir: $\frac{a}{b}$ de n. Un algoritmo utilizado tradicionalmente consiste en multiplicar a por n y dividir por b al resultado. Piense otra forma de resolverlos.

a. En esta bandeja, $\frac{1}{4}$ de las medialunas están rellenas con dulce de leche y $\frac{1}{3}$ están rellenas con chocolate. ¿Cuántas medialunas tienen chocolate y cuántas, dulce de leche?



b. En el dibujo, se ven $\frac{1}{3}$ de los alfajores. Dibujen la bandeja completa, ¿cuántos alfajores hay en total?



c. ¿Cómo se calcula cuántos son $\frac{2}{3}$ de 15 alfajores?

d. En un examen, $\frac{1}{5}$ de los 40 alumnos no aprobó. ¿Cuántos alumnos no aprobaron?

e. Un $\frac{3}{8}$ de los alumnos de 6.° grado son 15 alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el grado?

f. Papá recorrió 80 km de los 120 km que hay desde una ciudad hasta otra. ¿Qué parte le falta recorrer?

g. ¿Cuánto es $\frac{4}{5}$ de 150?

Este tipo de problemas que se resuelven con fracciones muestran otro sentido de este objeto matemático. Al resolverlos, se ponen en juego relaciones ya conocidas y otras que los niños producirán. Esto no resulta sencillo para ellos porque, en este caso, una colección de objetos es considerada un todo.

Ante todo, siempre cabe preguntarse qué recorrido han hecho los alumnos que les permita abordar estos problemas. Saben, por ejemplo, que 1/2 de 16 es la mitad de 16, que 1/3 de 24 se obtiene haciendo 24 ÷ 3, y lo han sistematizado para 1/*n*. Además, han elaborado muy tempranamente que 3/5 es 3 veces 1/5. Estos conocimientos, entre otros, serán un punto de apoyo para producir nuevas conceptualizaciones.

La organización de las medialunas en el problema **a.** permite mostrar que se pueden armar 4 grupos iguales de 6 medialunas cada uno, y entonces 1/4 del total de 24 medialunas es 6, porque con 4 partes "las tengo todas". Además, 1/3 de las medialunas es 8, porque se pueden armar 3 grupos de 8 para formar las 24. Sería interesante, en una puesta en común con los alumnos, preguntarles cuántas medialunas sería 1/2, cuántas 1/6, cuántas 2/3, etcétera. Es importante que los niños observen que este problema se relaciona con los problemas de reparto[6], donde la fracción es una parte; entonces calcular 1/4 de 24 alfajores consiste en armar grupos de 4 alfajores, tomar un grupo y contar cuántos alfajores tiene. Los problemas que siguen avanzan en la sistematización de estas relaciones en distintos contextos.

Para resolver el problema **e.**, los chicos pueden argumentar por ejemplo, que como 3 de los 8 grupitos es 15, entonces 15 ÷ 3 = 5 es un grupito. Como son 8, se calcula 5 x 8 = 40 alumnos en total. La sistematización y la descontextualización progresiva darán paso a la introducción del algoritmo mencionado, para su análisis y fundamentación a través de todo lo analizado previamente.

Relaciones de orden entre fracciones. Comparación

La comparación de fracciones es una actividad que atravesará todo el proceso de aprendizaje y de trabajo con este campo numérico.

[6] Ver en este libro el capítulo 4, "El trabajo con la multiplicación y con la división".

Si bien el cálculo algoritmizado puede ser más económico, el establecimiento de relaciones va enhebrando un tejido que es sostén para construir el sentido y da lugar a variados recursos de resolución que, eventualmente, fundamentan dichos algoritmos. Sobre estas cuestiones, trata la siguiente actividad:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Desarrolle, por lo menos, 3 estrategias que crea que pueden emplearse para cada uno de los siguientes problemas:

a. Para cocinar, se utilizó, la primera vez, $\frac{1}{5}$ del contenido de una lata de aceite y, la segunda vez, $\frac{1}{6}$ de otra lata igual a la anterior. ¿Cuándo se usó más aceite? ¿Por qué?

b. Florencia usó $\frac{4}{3}$ del tiempo que tenía para estudiar Historia y $\frac{3}{7}$, para Inglés. ¿A qué materia le dedicó más tiempo?

c. Catalina tejió $\frac{4}{6}$ de una manta, y Belén tejió $\frac{7}{12}$ de otra manta de iguales medidas. ¿Quién tejió menos?

Es importante destacar que problemas que resultan similares para el docente no tienen por qué resultar de la misma forma para los alumnos: los números involucrados pueden hacer variar completamente sus estrategias. Para abordar estos problemas, los alumnos pueden pensar distintos argumentos. Apelar a la definición de *fracción* puede ser un punto de apoyo. Por ejemplo, en el problema **a.**, una de las posibles justificaciones es que, en un caso, se necesitan 5 porciones de 1/5 para completar la lata; mientras que la segunda vez se precisan más porciones, 6 de 1/6. Entonces si se necesitan más, la parte es menor, por lo que se concluye que 1/6 es menor que 1/5. Un error común de los niños frente a este problema es extender las propiedades de los números naturales a los números racionales, y entonces decir que, como 6 es mayor que 5, sucede que 1/6 es mayor que 1/5. Es preciso realizar una reflexión explícita con los alumnos para que se trabaje esta manifestación de la "ruptura" existente entre los distintos campos numéricos y que ella permita un avance en sus conocimientos sobre estos números.

Un segundo punto de apoyo puede ser la comparación con un entero. En el problema **b.**, 4/3 es mayor que el entero, o sea que 3/3; en cambio 3/7 es menor que 7/7; lo cual argumenta que 4/3 es mayor que 3/7. Otro argumento se puede basar en el uso de fracciones equivalentes. En el problema **c.**, como ambas fracciones son menores que 1, y además 4/6 es equivalente a 8/12, entonces es mayor que 7/12.

La siguiente actividad avanza sobre la cuestión del orden.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Discuta en qué conocimientos se podrían apoyar los alumnos para resolver estos problemas:

a. La siguiente lista de fracciones está ordenada de menor a mayor. ¿Dónde ubicarías el $\frac{1}{2}$?, ¿y $1\,\frac{5}{7}$?

$\frac{2}{5}\quad \frac{4}{7}\quad \frac{5}{4}\quad \frac{12}{8}\quad \frac{15}{8}\quad \frac{19}{7}$

b. Intercalá una fracción entre cada par de números.

$\frac{3}{5}\qquad \frac{6}{5}$

$\frac{1}{2}\qquad \frac{3}{4}$

$\frac{5}{12}\qquad \frac{6}{12}$

Para resolver el problema **a.**, los niños pueden comparar 1/2 con las fracciones dadas. De esta manera, se puede decir que 2/5 es menor que 1/2 porque, si se considera 1 entero como 5/5, entonces la mitad de ese entero —pensado como 5/5— es 2/5 y medio quinto más. Siguiendo el mismo razonamiento, para comparar 1/2 con 4/7, se puede decir que la mitad de 7/7 es 3/7 y medio séptimo más, o sea 3/7 + 1/14, que es menos que 4/7. Luego 1/2 se ubica entre 2/5 y 4/7. Por otro lado, 2/5 y 4/7 tienen numerador menor que denominador, por lo tanto son menores que 1, con lo cual, seguro que 1 5/7 es mayor. Se sabe que 1 5/7 es lo mismo que 7/7 + 5/7 y que 5/4 es lo mismo que 4/4 + 1/4, entonces se puede comparar 5/7 con 1/4.

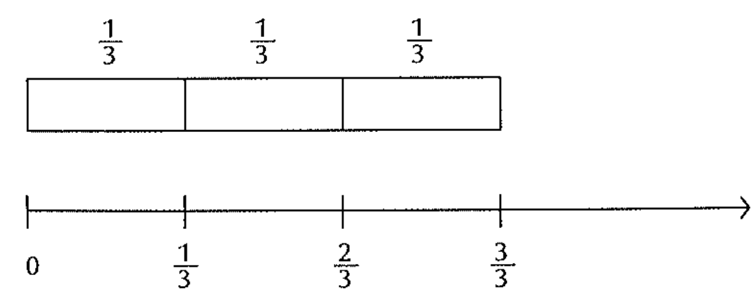
Como 5/7 es más de un medio y 1/4 es menos que un medio, se concluye que 12/7 es mayor que 5/4. Buscando fracciones equivalentes a 12/8, 15/8 y 19/7 para compararlas con 12/7 y que tengan el mismo denominador, se obtiene 84/56, 105/56, 152/56 y 96/56 respectivamente. Entonces, se puede ubicar 1 5/7 entre 12/8 y 15/8.

Sobre el problema **b.**, es importante destacar que se puede resolver utilizando estrategias similares, pues es posible que los alumnos digan que el problema no tenga solución para el segundo y el tercer par. Aquí se manifiesta nuevamente el obstáculo de conocer los números naturales, que lleva a los chicos a pensar, por ejemplo que, como entre 5 y 6 no hay más números (naturales), entonces entre 5/12 y 6/12, tampoco.

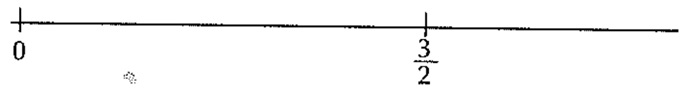
Otro tipo de problemas donde las fracciones funcionan y donde es posible recuperar todo lo aprendido sobre estos números, en este caso comparar fracciones, son los que utilizan la recta numérica como modo de representación. Sin embargo, se deben tener presentes algunas particularidades de este modo de representación.

- Los números se anotan ordenados y deben conservar cierta escala, que puede variar de una representación a otra.
- La escala se determina fijando la posición del 0 y del 1, o más generalmente, de dos números cualesquiera.
- Un punto representa un número; y ese número, a la vez, representa la distancia al 0 en la escala elegida.

Estas tres características muestran no sólo la complejidad del trabajo con las fracciones en la recta numérica, sino además, que los niños deberán comparar dos ideas distintas:



Esto hará necesaria la mediación del docente para negociar la incorporación de este nuevo modo de representación, donde ser "más chico" significa 'estar a la izquierda de' y donde los números racionales equivalentes tienen la misma ubicación sobre dicha recta.

> **Pensar las prácticas**
>
> Analice cuáles son los argumentos que un alumno, al finalizar 6.° año/grado, estaría en condiciones de elaborar cuando resuelve el siguiente problema:
>
> En esta recta, están representados el 0 y el $\frac{3}{2}$.
>
> – ¿Dónde se ubica $\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{4}$?
>
> – Ubiquen el $\frac{5}{6}$ y el $\frac{8}{6}$. ¿Dónde debe colocarse el $1\frac{1}{2}$?
>
> 
>
>
> – ¿Es $\frac{4}{3}$ mayor, menor o igual a $\frac{3}{2}$?, ¿por qué?
>
> – Ordenen los números de este problema de menor a mayor.

Este problema tiene el propósito de analizar la relación de orden de las fracciones en la recta numérica. Se espera que los argumentos que los alumnos utilicen para sostener sus respuestas se basen en las relaciones que fueron surgiendo de su trabajo previo con estos números, que involucran la definición, los resultados interiorizados por cálculo mental, la noción de *fracción equivalente*, etcétera. Para encontrar el punto que representa 1/2, puede partirse el segmento que mide 3/2 en tres partes iguales. Además como 1/4 es la mitad de 1/2, la mitad de la primera de esas partes mide un cuarto y permite indicar el 1/4.

Para ubicar 5/6 y 8/6, conviene pensar entre qué números enteros se encuentra cada fracción: 5/6 está entre el 0 y el 1; 8/6 está entre el 1 y el 2, ya que 6/6 es igual a 1, y 12/6 es igual a 2. Una vez ubicados los números sobre la recta, resulta muy sencillo ordenarlos de menor a mayor.

Para finalizar, es importante destacar que, así como el cálculo mental facilitará la incorporación de algunos resultados que se utilizarán una y otra vez para resolver nuevos problemas, los alumnos deberán internalizar algunas relaciones generales de comparación de fracciones una vez que se ha discutido su validez. Algunas de esas relaciones pueden ser las siguientes: fracciones cuyo numerador es mayor que su denominador son mayores que 1, fracciones cuyo numerador es la mitad del denominador son equivalentes a 1/2, y otras relaciones que surgirán de los problemas analizados.

Abordar las operaciones: la posibilidad de entender el funcionamiento de los algoritmos

Para iniciar este apartado, le proponemos pensar las siguientes cuestiones:

> **Pensar las prácticas**
>
> - ¿Qué saben los alumnos acerca de los números racionales en el momento de explicitar los algoritmos convencionales para operar?
> - ¿Qué tipo de problemas dan el marco apropiado para luego pensar en el funcionamiento de los algoritmos?
> - ¿Dónde reside la complejidad en este aspecto de la enseñanza de las fracciones?

Las operaciones de suma y resta entre fracciones aparecen involucradas ya desde los primeros problemas de introducción de estos números. Efectivamente, cuando los niños reparten 3 chocolates entre 4, una forma posible de escribir qué parte le toca a cada uno es 1/4 + 1/4 + 1/4. Además, aunque no en forma explícita, la resta aparece cuando se pide, por ejemplo, cuánto le falta a 3/5 para llegar a 2. Puede observarse, sin embargo, que estos problemas se resuelven produciendo distintas estrategias donde se han establecido relaciones. El algoritmo convencional aún no se ha introducido. Retomando lo expresado acerca de la riqueza del interjuego entre el cálculo mental y el algorítmico[7], de la importancia del apoyo en las propiedades y en los resultados internalizados, se puede asegurar que estos problemas son una herramienta fundamental de anticipación del algoritmo, de su control y de su comprensión posterior.

Proponemos, para desarrollar aún más estas cuestiones, la siguiente actividad:

Pensar las prácticas

Piense qué estrategias podrían desplegar los alumnos para abordar estos problemas:

a. Pedro fue al supermercado y compró $\frac{3}{4}$ kg de café, $1\frac{1}{2}$ kg de yerba, 3 paquetes de 1 kg de arroz, y $2\frac{1}{4}$ kg de pan. Después de pagar, puso en una bolsa todo lo que había comprado. ¿Cuánto pesaba la bolsa?

b. En un paquete, hay $\frac{3}{8}$ kg de azúcar; y en otro, hay $\frac{1}{4}$ kg. Si se vuelcan los dos en un frasco vacío donde se puede guardar 1 kg de azúcar, ¿se llenará el frasco?, ¿por qué?

c. Calculen mentalmente las siguientes sumas y restas:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$
$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=$
$\frac{2}{8}+\frac{1}{4}=$	$3-\frac{1}{2}=$

d. Calculen la fracción que falta en cada suma:

$\frac{3}{7}+\quad=2$	$\frac{7}{2}+\quad=4$

e. Sin hacer la cuenta, decidan si es posible que:

$\frac{3}{5}+1$ dé un resultado mayor que 2.

$\frac{1}{3}+\frac{8}{5}$ dé un resultado menor que 1.

$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ dé un resultado mayor que 1.

[7] Del mismo modo en que ha sido planteado en los capítulos 1, 2 y 3 a propósito del cálculo con números naturales.

Antes de tratar con los modos convencionales de operar con fracciones, los niños podrían utilizar lo que han aprendido sobre estos números. Por ejemplo, que 1/2 es igual a 2/4, que el doble de 1/6 es 2/6 y esto es igual a 1/3, que la mitad de 8/5 es 4/5, que a 3/5 le faltan 2/5 para llegar a 1, etcétera.

Enfrentados a problemas similares al **a.** y al **b.**, un niño escribió lo siguiente:

En una jarra se colocan $\frac{5}{8}$ litros de jugo para diluir y $1\frac{1}{2}$ litros de agua. ¿Cuántos litros hay ahora en la jarra?

2 litros y $\frac{1}{8}$ $\quad \frac{5}{8}+\frac{8}{8}+\frac{4}{8}=\frac{17}{8}$

En el tarro hay $\frac{3}{5}$ kg de galletitas de agua y $\frac{4}{10}$ kg de galletitas dulces. ¿Cuál es el peso total de las galletitas?

pesa 1 o $\frac{10}{10}$

Es importante notar que los números elegidos para estos problemas tienen, al menos, dos características: son reconocidos por los niños por haberlos utilizado desde mucho antes y, además, son fracciones con distinto denominador. A propósito de esta última particularidad, se propone que los alumnos elaboren estrategias para resolver sumas y restas sin utilizar un orden donde, primero, haya fracciones de igual denominador y, luego, fracciones con distinto denominador. Pensar que, como posible estrategia para sumar, por ejemplo, 2/8 + 1/4, se puede escribir 1/4 como 2/8, es decir, pensar en utilizar fracciones equivalentes y concluir que el resultado es 4/8, no es fácil para los niños.

> Se trata de un procedimiento cuya comprensión, más allá de la regla mecánica, es difícil porque hay que aceptar que, al reemplazar una fracción por otra equivalente, la suma seguirá siendo la misma. Es importante que el docente tenga presente esta complejidad y vaya chequeando en el desarrollo de las clases el grado de aceptación y comprensión que esto tiene en los alumnos[8].

[8] Sadovsky (comp.) (2005): óp. cit.

Posteriormente, el maestro podrá presentar nuevos procedimientos, incluido el convencional, para sumar fracciones de distintos denominadores, por ejemplo 2/15 + 8/25, donde 15 y 25 no son familiares para los alumnos y entonces la búsqueda de fracciones equivalentes se dificulta más. Los problemas de proporcionalidad directa brindan un contexto apropiado para el tratamiento de las operaciones con fracciones. A través de la resolución de estos problemas y con el uso implícito de las relaciones de que al doble de una cantidad le corresponde el doble de su correspondiente, al triple le corresponde el triple y en general, cuando una de las cantidades se multiplica o divide por un mismo número, su correspondiente se multiplica o divide también por el mismo número, los niños se encontrarán operando con fracciones.

La siguiente actividad apunta en el mismo sentido.

Pensar las prácticas

Los siguientes problemas, por un lado, abordan la ruptura entre las operaciones con números naturales y las operaciones con fracciones, y por otro, vinculan la proporcionalidad con las operaciones entre fracciones. Analice de qué aspectos de la ruptura se trata y discuta cómo las relaciones de proporcionalidad dan paso a establecer posibles estrategias para multiplicar o dividir una fracción por un número natural.

a. Cada caja de galletitas trae 6 paquetes de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Cuánto pesa una caja completa?

b. Juan es cocinero y quiere anotar en una tabla las cantidades necesarias de agua para preparar un postre, para distintas cantidades de porciones. Ya anotó las cantidades necesarias para 1, 2 y 3 porciones. ¿Cómo puede usar estos datos para calcular las cantidades que le faltan?

Porciones	1	2	3	5	6	8	10
Agua (en litros)	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$				

c. Busquen argumentos de modo que, usando estrategias de cálculo mental, puedan completar la línea punteada con <, > o =.

$\frac{3}{4}$ x 2 2	16 x $\frac{4}{3}$ 16	$\frac{1}{5}$ x 5 1
$\frac{7}{2}$ x 8 8	$\frac{1}{8}$ x 5 x 8 5	3 x $\frac{1}{4}$ 3

d. Esta tabla relaciona las cantidades de jugo (en litros) que se obtienen, según la cantidad de naranjas (en kilos) que se expriman, en cada caso. Para completar los datos que faltan, hay que operar con las fracciones, ¿qué cálculos es preciso hacer para encontrarlos?

Cantidad de naranjas (en kg)	1	2	3	$\frac{1}{2}$
Cantidad de jugo (en litros)			$\frac{6}{5}$	

e. ¿Cómo se podrá calcular la mitad de $\frac{1}{8}$, de $\frac{1}{3}$ y de $\frac{3}{5}$? ¿Cómo se podrá calcular $\frac{3}{5} \div 4$?

f. Analicen cada una de las siguientes afirmaciones. Decidan si la consideran verdadera o falsa. Justifiquen sus respuestas.

- Siempre que se multiplican dos números naturales distintos de 0 y 1, el producto es mayor que cualquiera de los factores.
- Siempre que se multiplican dos fracciones distintas de 1, el producto es mayor que cualquiera de los factores.
- Si se multiplica un número natural por una fracción, el producto siempre es mayor que ese número natural.
- Si se multiplica un número natural por una fracción, el producto siempre es mayor que esa fracción.

Hay distintas expresiones que "muestran" la solución del problema **a.**:

3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4
6 veces 3/4
6 x 3/4
18/4

Algunas de estas notaciones han aparecido anteriormente en otros problemas, y en este momento, se trata de empezar a explicitar, aunque es posible que algún niño lo haya propuesto antes, un procedimiento para multiplicar una fracción por un número natural. Será un momento apropiado para "ver" y luego sistematizar que, para resolver 6 x 3/4 (cuyo resultado debe ser 18/4), se puede multiplicar 6 x 3 y conservar el denominador 4.

El problema **b.** da la posibilidad de encontrar muchas estrategias para resolverlo. Por ejemplo, si para 1 porción se necesitan 2/5, para 5 porciones se necesitarán 5 veces 2/5, es decir: 2/5 + 2/5 + 2/5 + 2/5 + 2/5, que equivale a 10/5. Además, si para 2 porciones se necesitan 4/5 y, para 3 porciones, se precisan 6/5, para 5 porciones, que es la suma entre 2 y 3, debe necesitarse la suma entre 4/5 y 6/5, lo que permite controlar el resultado 10/5 obtenido antes. Por otro lado, para calcular 6 porciones, sabemos que 6 es el doble de 3, entonces le corresponde el doble de 6/5, que es 12/5. Por último, si sabemos que, para 1 porción, necesita 2/5 litros de agua, se pueden obtener todas las otras cantidades multiplicando por 2/5: 2 x 2/5, que es 4/5; 3 x 2/5, que resulta 6/5; 5 x 2/5, cuyo resultado es 10/5; 8 x 2/5, que es 16/5; etcétera.

Los problemas **d.** y **e.** abordan la cuestión de dividir una fracción por un número natural. En el problema **d.**, si de 3 kg se obtienen 6/5 litros de jugo, para encontrar cuántos litros se obtienen de 1 kg, se necesita calcular la tercera parte de 6/5. Como 6/5 equivale a 2/5 + 2/5 + 2/5, entonces su tercera parte será 2/5, es decir que 6/5 ÷ 3 es 2/5. Se puede "ver" que, para dividir esta fracción por 3, se puede dividir 6 ÷ 3 y mantener el denominador. En **e.**, se pide dividir 3/5 por 4. Aquí el procedimiento anterior se puede usar si se encuentra una fracción equivalente a 3/5 con un numerador que sea divisible por 4. Volviendo al problema **d.**, para calcular la cantidad de jugo que le corresponde a 1/2 kg de naranjas, demanda pensar que, si a 1 kg le corresponden 2/5 litros, a 1/2 kg, que es su mitad, le corresponde la mitad, es decir, 1/5 litros. Pero a su vez, se sabe que, para calcular los litros, se pueden multiplicar los kilos por 2/5, con lo cual hay que hacer la cuenta 1/2 x 2/5. Estas dos informaciones —que el número que corresponde a 1/2 es 1/5 y que el número que le corresponde a 1/2 se resuelve con la cuenta 1/2 x 2/5— obligan a pensar cómo debe funcionar el algoritmo de multiplicación entre dos fracciones para obtener el resultado que ya se conoce.

Finalmente, los problemas **c.** y **f.** habilitan a que el maestro convoque explícitamente a los alumnos a reflexionar sobre las propiedades válidas para los números naturales, las que pueden dejar de serlo cuando están involucradas las fracciones.

Los números con coma entran a clase

El trabajo escolar en torno a las expresiones decimales demanda tener en cuenta distintas cuestiones. En primer lugar, la elección de un tipo de problemas que marquen un contexto apropiado que haga que los alumnos "se metan" con estos números. La reconstrucción de una cantidad de dinero usando monedas de una determinada clase, la escritura de equivalencias entre cantidades de dinero, las sumas y restas de precios propician un trabajo muy enriquecedor en este sentido, ya que permiten iniciar el establecimiento de relaciones usando números familiares para los alumnos[9]. Algunas relaciones pueden ser:

- Se necesitan 10 monedas de 10 centavos para tener $1, entonces 10 centavos es lo mismo que 1/10 de $1.
- Para formar $0,87 se necesitan 8 monedas de 10 centavos, en cambio para obtener $2,08, se necesitan 8 monedas, pero de 1 centavo.
- Para repartir $2 entre 10, se puede hacer 2 ÷ 10 = 2/10 = 0,2, que es lo mismo que 2 de 1/10 o el doble de 0,1.

En segundo lugar, se deben analizar distintas características de estos números, algunas de las cuales están relacionadas con las propiedades de los números naturales; y otras, con las fracciones. Es conveniente explicitar el valor de cada posición decimal y las relaciones entre las posiciones contiguas. Algunas relaciones pueden ser:

- La primera posición después de la coma es la de los décimos; la segunda, la de los centésimos, etcétera.

[9] Para tratar estas cuestiones, se recomienda la lectura del Documento N.° 5 *Aportes para el desarrollo Curricular: Matemática: "Acerca de los números decimales: una secuencia posible"* (2001). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación.

- 10 de 1/100 es 1/10 ó 10 centésimos es 1 décimo, etcétera.
- 10 de 1/100 es 1/10, porque si los centésimos se agrupan de a 10, se necesitan 10 grupos para armar 1.
- 10 veces una decena es una centena, pero 10 veces un centésimo es 1 décimo.
- Al multiplicar por 10 los décimos, se obtiene 1 entero; al multiplicar por 10 un centésimo, se obtiene 1 décimo.

Se explicitan también las relaciones entre las fracciones decimales y los números decimales. Algunas pueden ser:

- 7/10 = 70/100 = 700/1.000 = 0,7
- 3,51 = 3 + 5/10 + 1/100
- 75/100 = 70/100 + 5/100 = 7/10 + 5/100 = 0,7 + 0,05 = 0,75

Por último, todo el trabajo en torno a los números naturales y a las fracciones resultará un punto de apoyo para trabajar con las operaciones y con los criterios de comparación de los números decimales. Con respecto a esto y en forma similar a como se viene trabajando con aquellos números, se espera que los algoritmos puedan introducirse una vez que los alumnos hayan elaborado estrategias que les permitan validarlos con fundamentos matemáticos y no, que los algoritmos sean aceptados sólo porque el maestro lo dice.

Para continuar pensando estos asuntos, le proponemos estas actividades:

Pensar las prácticas

a. ¿Qué criterios de comparación de números decimales pueden validarse a partir del conocimiento sobre las fracciones?

b. ¿Qué conocen los alumnos sobre la comparación de números naturales, que les permita comparar números decimales?

c. ¿Cómo es posible el enriquecimiento mutuo entre el concepto de *número decimal* y el concepto de *medida*?

d. Explicitar las relaciones en las que es preciso apoyarse para resolver los cálculos de los siguientes problemas:

- ¿Cuántas veces hay que sumar 0,1 para obtener 1? ¿Y para obtener 2?
- ¿Cuántas veces hay que sumar 0,01 para obtener 1?
- Proponer descomposiciones equivalentes del número 3,08.

En el problema **d.**, la relación entre los décimos y la definición de *fracción* permiten establecer las distintas equivalencias. Por ejemplo, 10 veces 0,1 es 1. Si lo expresamos en fracción decimal, 10 veces 1/10 es 1; y 100 veces 0,01 es 1 ó 100 veces 1/100 es 1. En el último ítem, las distintas descomposiciones del número evidencian la relación de equivalencia que existe entre ellas: 3,8 = 3 + 0,8 = 3 + 8 x 0,1.

Pensar las prácticas

De estos números racionales, ¿cuál es el mayor?

a. ¿3,8 ó 3,79?

b. ¿3/100 ó 0,016?

c. ¿3,1 + 0,2 ó 3,2 + 0,1?

d. ¿2,09 + 0,01 ó 2,1?

Frente al ítem **a.**, muchos niños creen que 3,8 es menor que 3,79 ya que extienden las propiedades de los números naturales a los números racionales y argumentan según la cantidad de cifras que tiene el número. Es necesario entonces hacer jugar las relaciones propias de este campo numérico en nuevos contextos, explicitarlas, promover que los chicos debatan los argumentos sobre los que sustentan sus decisiones y que los pongan a prueba.

Por ejemplo, para comparar los números, se puede pensar que, como el entero es igual a 3, hay que seguir analizando y "ver" cuál es el que tiene más décimos. En este caso, 38 décimos es mayor que 37 décimos. O si comparamos centésimos, ya no trabajando con 3,8 sino con su equivalente 3,80, se tiene que 380/100 es mayor que 379/100, por lo tanto 3,8 es mayor que 3,79. El desafío de la situación **b.** está puesto en el reconocimiento de distintas escrituras de un número decimal. En el problema **d.**, lo que se juega es la siguiente equivalencia: 9/100 + 1/100 = 10/100 = 1/10.

Para seguir pensando en estas cuestiones, le proponemos la siguiente actividad:

> **Pensar las prácticas**
>
> **a.** ¿A qué número decimal corresponde la fracción 7 3/200?
>
> **b.** Encontrar un número decimal entre 3,54 y 3,55.
>
> **c.** Calcular la mitad de 2,6.
>
> **d.** Calcular el doble de 0,28.

El problema **a.** propone hallar decimales equivalentes a una fracción. Para esto, hay que tratar de buscar la fracción decimal[10] equivalente, y luego, pasar esta fracción a una expresión decimal. Así, en este caso 7 3/200 es igual a 7 15/1.000 que es igual a 7,015; a 7,01500, etcétera.

Para el problema **b.**, el argumento que podrían proponer algunos alumnos en principio es que, como los decimales tienen las mismas características que los naturales, entonces no hay un número entre 3,54 y 3,55. Para poner en evidencia la falsedad de esta conjetura, se puede apelar a las distintas expresiones equivalentes para un decimal; por ejemplo 3,54 es igual a 3,540 y 3,55 es igual a 3,550, con lo cual un número posible puede ser 3,546. Esto contribuirá a construir la idea de densidad de los números racionales[11] (aunque en este caso se trate de expresiones decimales), es decir, que los chicos puedan reconocer explícitamente que, entre dos expresiones decimales, siempre es posible encontrar otra expresión decimal.

Este tipo de análisis podría explicitarse en formas como la siguiente:

- ¿Cuántos números hay entre 3,5 y 3,6?

Como 3,5 es equivalente a:

[10] Una *fracción decimal* es aquella que tiene por denominador una potencia de 10.

[11] La propiedad de densidad establece lo siguiente: entre dos números racionales cualesquiera, siempre es posible encontrar infinitos números racionales.

3 enteros + 5/10
3 enteros + 50/100
3 enteros + 500/1.000
Siendo 5/10, 50/100, 500/1.000, etcétera, fracciones equivalentes.

Del mismo modo, 3,6 es equivalente a:

3 enteros + 6/10
3 enteros + 60/100
3 enteros + 600/1.000
Siendo 6/10, 60/100, 600/1.000, etcétera., fracciones equivalentes.

Por consiguiente, cualquier número entre 3 enteros más 50/100 y 3 enteros más 60/100 puede ser un número entre los infinitos números decimales que existen entre ellos.

En el caso de los problemas **c.** y **d.**, para calcular dobles y mitades de decimales, se podría utilizar un procedimiento que se apoye en la descomposición de los números, buscar sus mitades y, luego, sumarlas. Por ejemplo: 2,6 se podría pensar como 1,3 + 1,3 = 2,6 o hacer la mitad de 2 más la mitad de 0,6, o sea, 1 + 0,3. En el caso del doble de 0,28, es posible considerar el doble de 0,20 y el doble de 0,08 y, luego sumarlos: 0,40 + 0,16 = 0,56.

¿Cómo instalar una cotidianeidad de trabajo con los números racionales en la escuela?

Durante muchos años, se ha postulado que la resolución de problemas es una actividad importante a través de la cual se aprende matemática. Sin embargo, este no es el único tipo de actividad que permite que los alumnos avancen en sus conceptualizaciones sobre el número racional. A lo largo de este capítulo, se han expuesto distintos aspectos que contribuyen a dicha tarea. En esta instancia, se pueden recorrer nuevamente las actividades propuestas y reflexionar sobre el tipo de problemas que enriquecen la apropiación del concepto, las intervenciones del docente y las interacciones entre los alumnos en el aula.

La siguiente actividad abre estas cuestiones, y no se esperan respuestas puntuales. Son más bien a modo de interrogantes para acompañar la reflexión.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Le proponemos que vuelva a los análisis realizados a lo largo del capítulo y responda a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué tipo de práctica favorecería que los alumnos se apoyasen en sus conocimientos sobre las fracciones para estar seguros de sus resultados?
- ¿Qué tipo de práctica favorecería que los alumnos aceptasen los problemas como suyos y se involucrasen en la producción de conocimientos sobre estos números?
- ¿Qué tipo de práctica favorecería que los alumnos se involucrasen en un debate de ideas sobre el funcionamiento de las fracciones?

En principio, pensar en una gestión de las clases que fomente la responsabilidad de los alumnos por sus aprendizajes implica ponerlos a resolver problemas donde la validación del proceso sea parte del trabajo.

Entendemos por *validación* el proceso por el cual los chicos pueden acceder, por sus propios medios y usando el conocimiento matemático, a dar cuenta de la validez de los resultados y las resoluciones que producen, entendiendo que los resultados incluyen los procesos. Resolver un problema implica desplegar un cierto proceso y agotarlo. La validación no es sólo saber si el resultado coincide o no con lo esperado: es fundamentar, es saber dar razones de por qué estas herramientas resuelven el problema. Esta posición que queremos lograr en los alumnos contradice aquello culturalmente establecido. En efecto, lo usual es que el alumno resuelva, y que el docente corrija esa resolución. Esto dificulta la posibilidad de que el estudiante se responsabilice matemáticamente por sus resultados. Acá es necesario un trabajo muy intenso por parte del docente, que muestre su intención de que los alumnos sean quienes validen sus propias producciones[12].

[12] Revista *La Educación en nuestras manos* (Bs. As.), núm. 71 (mayo de 2004). SUTEBA.

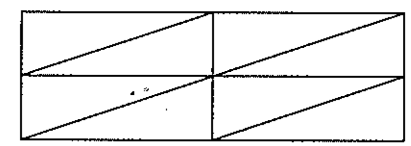
Reiteramos, el docente debe convocar expresamente a sus alumnos a buscar fundamentos matemáticos que expliquen sus resultados. ¿Qué otras posibilidades ofrece el contexto de trabajo con números racionales para este propósito?

Para pensar en esta pregunta, le proponemos la siguiente actividad:

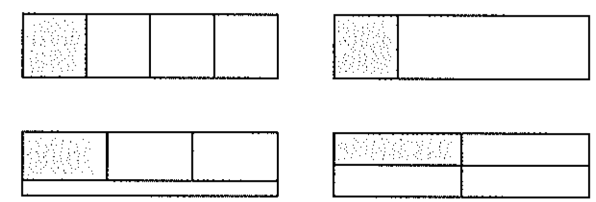
PENSAR LAS PRÁCTICAS

En los siguientes problemas, analice qué argumentos pueden utilizar los alumnos para validar las soluciones que encuentren.

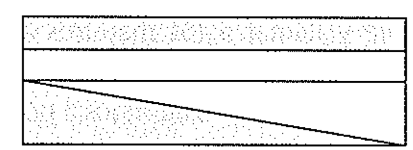
1) a. Pintá $\frac{1}{4}$ del entero de dos formas distintas.



b. ¿Es cierto que, en los siguientes dibujos, se pintó $\frac{1}{4}$? Explicá cómo lo pensaste en cada caso.



c. ¿Es verdad que el rectángulo y el triángulo pintados representan ambos $\frac{1}{4}$ del entero? ¿Cómo podrías hacer para estar seguro de tu respuesta?



2) Lucas dice que el doble de $\frac{1}{10}$ es $\frac{1}{20}$ porque el doble de 10 es 20.

Nicolás dice, en cambio, que el doble de $\frac{1}{10}$ es $\frac{1}{5}$, pero no sabe cómo explicarlo. ¿Te parece correcto lo que dicen los chicos? ¿Por qué?

3) Lorena dice que tenía 20 caramelos y se comió la mitad; y Amalia, quien tenía 12 caramelos, también se comió la mitad de los que tenía. ¿Es cierto que las dos chicas comieron la misma cantidad de caramelos?

4) ¿Es cierto que, si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador? ¿Por qué?

5) Martina le cuenta a Camila: "Hoy repartí chocolates entre mis amigas y le di $\frac{1}{3}$ de chocolate a cada una". Camila responde: "Entonces, seguro que tenías 3 chocolates para repartir entre 9". Martina le dice a Camila que se equivocó en el cálculo. ¿Cuántos chocolates tenía Martina para repartir? ¿Alcanzan los datos para saberlo? ¿Por qué?

Una idea que subyace a estos problemas se relaciona con el tipo de actividad intelectual que la consigna invita a realizar. En el problema 1), por ejemplo, se muestran tres partes aparentemente muy similares, pero que obligan a elaborar, de formas diferentes, lo que los niños saben sobre las fracciones. Además de invitarlos explícitamente a explicar sus procedimientos, las tres situaciones ponen en juego distintas conceptualizaciones sobre la noción, particularmente errónea, que consiste en asociar una parte de cuatro con partes que no son iguales o que no tienen la misma forma, conocimiento no enseñado pero, sin embargo, "aprendido" por los niños. Ha sido estudiado que los niños le agregan más características a un concepto de las que el concepto tiene; y entonces se hace necesario discutir estas concepciones que, de otro modo, pueden aparecer como errores. Los problemas 2) y 3) ahondan en estas cuestiones que involucran la decisión didáctica de llamar a los alumnos a comprometerse con su aprendizaje y llamar a los maestros a preguntarse qué piensan sus alumnos acerca de este concepto.

Los problemas 4) y 5) invitan a los alumnos a poner en juego otros aspectos del trabajo matemático: debatir sobre una ley que ha sido formulada por otros para comparar números y analizar las condiciones que hacen que un problema tenga más de una solución, única o ninguna. Si bien es probable que los alumnos utilicen fracciones para validar la regla del problema 4), es el análisis que sobre los ejemplos se realiza lo que sostiene la generalidad. Pueden proponer, por ejemplo que, si comparamos 5/3 con 5/8, como además de tener el mismo numerador 5/3 es mayor que 1 y 5/8 es menor que 1, la conjetura es verdadera. Falta tomar fracciones que sean, por ejemplo, todas menores que 1, por ejemplo 5/8 y 5/12. Pero 5/8 es lo mismo que 5 de 1/8, y 5/12 es lo mismo que 5 de 1/12. Entonces se puede comparar 1/8 con 1/12. Se necesitan 8 partes para completar 1 entero y 12 en el otro caso, entonces la fracción que tiene menor denominador es más grande porque hacen falta menos partes para armar el entero, lo que prueba que la ley es cierta.

Aprender a poner en palabras lo realizado es un trabajo conjunto entre los alumnos y el docente, trabajo que lleva tiempo y se puede lograr sólo si se realiza en forma sostenida.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Analice qué tipo de trabajo matemático requiere poner en juego estos problemas.

1) a. La mamá de Matías compraba todas las semanas 2 kg de galletitas. Decidió armar una tablita que le permitiría comprar rápidamente los paquetes de galletitas que necesitaba según el peso de cada paquete. ¿Cuántos paquetes necesita en cada caso?

Si los paquetes tienen	Necesito
$\frac{1}{4}$ kilo	
$\frac{1}{2}$ kilo	
$\frac{1}{3}$ kilo	
$\frac{1}{6}$ kilo	
$\frac{1}{8}$ kilo	

b. La mamá de Juan tomó la idea e hizo lo mismo. Ella compraba siempre 3 kilos de galletitas. ¿Es correcta la tabla que armó? En caso de que alguna cantidad de paquetes sea incorrecta, corregila.

Si los paquetes tienen	Necesito
$\frac{1}{4}$ kilo	12 paquetes
$\frac{1}{2}$ kilo	6 paquetes
$\frac{1}{3}$ kilo	10 paquetes
$\frac{1}{6}$ kilo	16 paquetes
$\frac{1}{8}$ kilo	24 paquetes

2) Analice si, para repartir en partes iguales 3 chocolates entre 4 chicos, son o no equivalentes los siguientes procesos:

a. Partir cada uno de los tres chocolates en 4 partes iguales y dar a cada chico una parte de cada chocolate.

b. Partir por la mitad 2 de los 3 chocolates y dar una mitad a cada chico, y partir el tercer chocolate en 4.

Exprese usando fracciones cada uno de los repartos anteriores. Después, analice y argumente si son o no equivalentes las expresiones que surgen en cada caso.

3) El contenido de una botella de $1\frac{1}{2}$ litro de jugo se va a servir en 6 vasos iguales. ¿Cuánto jugo hay que colocar en cada vaso para que haya en todos la misma cantidad y no sobre nada?

Una práctica que invite al alumno a usar el conocimiento matemático como medio para estar seguro de sus resultados debe provocar momentos de reflexión sobre lo realizado. Estos espacios de análisis podrían dar lugar a la aparición de nuevos problemas, nuevas relaciones no "vistas" en el momento de la resolución, modos de resolución distintos del propio; en definitiva, podrían generar nuevos aprendizajes. Los problemas **1) a.** y **b.** muestran situaciones que ya han sido elaboradas por los alumnos, pero presentadas de esta manera, permiten establecer nuevas relaciones; por ejemplo, la *proporcionalidad directa* entre los kilos de galletitas y la cantidad de paquetes, y la *proporcionalidad inversa* entre el tamaño de los paquetes y el número de los paquetes (aunque estos conceptos no sean sistematizados y presentados con estos nombres en esta instancia de la escolaridad). Es interesante destacar además, la riqueza de llevar a los alumnos a discutir sobre un problema que fue resuelto por otros.

Finalmente, un trabajo matemático en el aula que contemple la validación como parte del proceso involucra el compromiso del docente de "meterse" en los problemas para que sean enseñables a "estos" alumnos. Esta actividad matemática del docente consiste en la reconstrucción de los procesos de validación adaptados a los conocimientos de sus alumnos, lo cual supone que el docente reconstruya sus propios conocimientos. Es decir, el docente aprende matemática cuando reformula la fundamentación de los problemas teniendo en cuenta qué saben sus alumnos.

El problema **3)** se podría resolver con la cuenta 1 1/2 ÷ 6; y se hace necesario buscar procedimientos de resolución cuando aún el algoritmo de la división entre fracciones no fue explicitado. Una forma consiste en buscar una fracción equivalente a 1 1/2 que resulte fácil de dividir por 6, así:

1 1/2 = 3/2 = 18/12

entonces 1 1/2 ÷ 6 es lo mismo que 18/12 ÷ 6.

Como 18/12 representa 18 porciones de 1/12, al dividir las 18 porciones por 6, se obtienen 3 porciones. Entonces, 18/12 ÷ 6 = 3/12. Otra forma de resolver la cuenta es pensar que dividir por 6 es lo mismo que multiplicar por 1/6:

$$\frac{3}{2} \div 6 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \div 6 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Como dijimos al principio, este contenido es complejo, pero a la vez, su potencia reside en ser un lugar privilegiado donde las distintas relaciones posibles de establecer permiten que los alumnos se sumerjan en un tipo de actividad matemática y se apropien de un modo cultural diferente.

CAPÍTULO 6

Acerca de la enseñanza de la geometría

El propósito de este capítulo es compartir algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la geometría en la educación primaria.

PENSAR LAS PRÁCTICAS
Le pedimos que realice un punteo acerca de cuál podría ser la finalidad de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.

Desde el punto de vista de nuestras concepciones, la enseñanza de la geometría en la escuela primaria apunta a cuatro grandes objetivos:

a. El estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos.

b. El estudio del espacio y de los movimientos, y de las relaciones que en él se dan.

c. El inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico.

d. El reconocimiento de que la escuela es un lugar de creación, transformación y de conservación de una parte seleccionada de la cultura, entre otras, la geometría.

Nos detendremos a caracterizar cada uno de estos objetivos.

a. El **estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos** implica mucho más que reconocerlos perceptivamente y saber sus nombres. Implica tenerlos disponibles a fin de poder recurrir a ellos para resolver diferentes tipos de situaciones, así como utilizarlos para identificar nuevas propiedades sobre las figuras. En ambos casos, dichas propiedades permitirán dar cuenta de la validez de lo que se va produciendo.

Esto será posible a través de un trabajo que requiera a los alumnos la puesta en juego de las características ya conocidas de las formas geométricas y que permita obtener nuevas relaciones entre objetos conocidos, o definir nuevos objetos a partir de sus propiedades.

b. El estudio de este eje de contenidos se refiere a una serie de conocimientos necesarios para el dominio de las **relaciones espaciales**, tales como la orientación en el espacio, la ubicación de un objeto o de una persona, la organización de los desplazamientos, la comunicación de posiciones y desplazamientos, y la producción e interpretación de representaciones planas del espacio.

Parte de estos conocimientos se desarrolla en los niños antes de recibir alguna enseñanza sistemática. Estos aprendizajes extraescolares se dan a través de las propias acciones que el niño realiza en el espacio y con los objetos que están en él. Por ejemplo, los desplazamientos en el espacio físico no requieren de la enseñanza para que los niños pequeños los construyan. Esto puede observarse desde muy temprana edad, cuando se desplazan por el espacio sin "perderse"; por ejemplo, cuando salen de la sala de Jardín de Infantes para ir al baño y luego regresan realizando el recorrido inverso.

Si bien es cierto que los niños construyen algunos conocimientos espaciales independientemente de la enseñanza formal, esto no significa que no tengan nada que aprender, en forma sistemática a lo largo de la escolaridad, en cuanto al dominio del espacio. Esos aprendizajes asistemáticos no son suficientes para resolver con éxito muchas situaciones espaciales; por ejemplo, ante la necesidad de establecer puntos de referencia para poder ubicarse o ubicar un objeto en el espacio; para poder interpretar la información en un plano, etcétera.

c. El **modo de pensar geométrico** supone poder apoyarse en propiedades ya estudiadas de las figuras y de los cuerpos para poder anticipar relaciones desconocidas al resolver problemas. Se trata de poder obtener la solución de ese problema —en principio, desconocida— a partir de los conocimientos ya disponibles. A esto, llamamos un *proceso anticipatorio*. Por otra parte, se trata también de poder saber que dicho resultado es el correcto porque las propiedades puestas en juego lo garantizan. A esto, llamamos *validación*.

Pensando este trabajo como los inicios de una vía de entrada privilegiada al razonamiento deductivo, es necesario diseñar una propuesta que permita evidenciar los límites de los dibujos y las medidas. "Creemos que hay un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar propio de la matemática, que sólo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder. Es la relación con el saber lo que está en juego"[1].

d. Una de las razones por las que, en general, **la enseñanza de la geometría** tiene menos "presencia" en las aulas es porque no se le reconoce, de manera sencilla, una vinculación directa con su uso en la vida diaria. Las ideas referidas a que los niños sólo podrán aprender aquello que les resulte cotidiano y útil responden a una corriente que se encuadra en una concepción de la matemática instrumentalista.

Estas concepciones provocan forzamientos en los conceptos para vincularlos a los objetos reales, así, se los matematiza; como por ejemplo, al enseñar el concepto de *paralelas* a través de las vías del tren. Estas no son paralelas, ni siquiera son líneas rectas. Nuestra propuesta es enseñar los objetos geométricos donde estos "viven", es decir, en las figuras geométricas. "Una centración exclusiva en la utilidad hace perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento"[2].

Si bien hay problemas interesantes que vinculan lo cotidiano con el saber geométrico —por ejemplo: qué medidas tomar cuando hay que reponer el vidrio de una ventana—, hay todo un universo de problemas intramatemáticos, puramente geométricos, que otorgan sentido por sí mismos a la enseñanza de la geometría.

¿Qué entendemos por *trabajo geométrico* en la escuela?

En términos generales, la enseñanza de la geometría casi siempre ha estado ligada a un tratamiento que supone la "aparición natural" de un

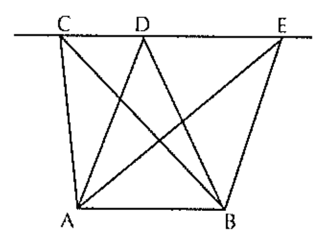
[1] Ver Documento N.º 5 en P. Sadovsky, C. Parra, H. Itzcovich y C. Broitman (1998): *La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula.
[2] Marco general del Pre-Diseño Curricular (1999). Bs. As.: GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula.

concepto geométrico como un enunciado general, a partir de la observación, de la percepción, de presentar definiciones y de algunas mediciones que establezcan los alumnos sobre las representaciones de los objetos geométricos. Por ejemplo, en Segundo Ciclo, se espera que los alumnos establezcan el enunciado general acerca de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Se intenta "demostrar" esta relación a través del recorte de los ángulos del triángulo, del calcado de los tres ángulos de manera consecutiva o de la medición de los tres ángulos y de su posterior suma, etcétera. Sabemos que es inevitable que, en toda medición, siempre haya error; cabe preguntarse entonces, ¿cuál es la relación entre las constataciones empíricas que los alumnos encuentran y la propiedad en cuestión? ¿Por qué, si han obtenido valores cercanos a los 180º, el enunciado general dice 180º? ¿Quién explica la diferencia entre lo realmente hallado y la formulación teórica? Este tipo de enseñanza reduce la actividad del alumno a una "cuestión de fe". Se cree en la propiedad, porque el docente lo dice.

El tipo de práctica que planteamos para el trabajo en geometría intenta no basarse en el trabajo empírico de modo tal de insertar lo geométrico en el terreno de la deducción. La actividad matemática no es mirar y descubrir: es crear, producir, argumentar.

Pensar las prácticas

a. Sin medir, decida cuál de los triángulos (ABC, ABD o AEB) tiene mayor área, sabiendo que la recta CE es paralela al segmento AB:



b. Identifique qué conocimientos son necesarios para poder resolver el problema.

c. Detalle los modos posibles de validación.

Para resolver este problema, será necesario advertir que los tres triángulos tienen la misma base y la misma altura, por lo tanto, sus áreas serán iguales.

En general, los alumnos contestan que "se ve" que el triángulo ADB tiene mayor área basándose en lo perceptivo. Esta respuesta no es casual. Si los alumnos despliegan frecuentemente un trabajo geométrico basado en la observación, en la manipulación y en la medición, es lógico que "miren", que "recorten y peguen" o que "midan", intentando determinar cuál tiene mayor área. Estas acciones sobre los dibujos podrían generar contradicciones difíciles de salvar. Por ejemplo, si un alumno mide y dice que el de mayor área es el triángulo ADB, y otro mide y calcula que el de mayor área es el triángulo ACB, ¿quién zanja esta diferencia? Sobre todo, si ambos "midieron bien", y los errores son aquellos propios del hecho de medir (un milímetro de diferencia en la regla, la escuadra apenas torcida, un ojo que no es muy preciso, etcétera).

Desde la perspectiva que adoptamos, este tipo de trabajo empírico aleja a los alumnos del tipo de quehacer matemático al que adherimos. Sin la posibilidad de elaborar argumentos que sostengan lo que se responde, es decir, sin validación, no hay geometría (ni matemática), sea cual sea el año escolar del que se trate.

Cuando hablamos de *validación*, no estamos pensando en la elaboración acabada de un teorema con abrumantes consideraciones formales.

Hablamos de que un alumno debe ser capaz de argumentar, de fundamentar sus conclusiones, de considerar los fundamentos de sus compañeros para aceptarlos o rechazarlos, de hacer el esfuerzo de entender la demostración hecha por otro, de intentar proponer él mismo una demostración.

Pero a su vez, efectuada la medición y aplicada la fórmula, los valores encontrados son esos, pero para muchos alumnos, podrían haber sido otros. En lugar de validación, hay contingencia, la cual queda claramente expresada en términos de los alumnos cuando dicen: "A mí me dio..., a vos, ¿cuánto te dio?".

Para que los alumnos entren en un trabajo argumentativo, habrá que ofrecerles situaciones didácticas, adecuadas al nivel de su escolaridad, que les muestren la insuficiencia de lo experimental como criterio de validación. Lo importante de este tipo de propuestas es que permiten que aparezca lo deductivo por sobre lo experimental, aunque lo experimental forme parte de un primer momento del trabajo con un tinte más exploratorio. Las relaciones establecidas son generales, es decir, independientes de las medidas de los lados de los triángulos; en este caso: "Si tres triángulos tienen la misma altura por pertenecer sus vértices a rectas paralelas y tienen la misma base, entonces tienen igual área". Con este tipo de argumentación, cada problema de comparación de áreas de triángulos no es un caso particular en el que hay que construir nuevo conocimiento como si nada de lo aprendido fuera útil. Se pueden reutilizar los conocimientos recurriendo a ellos independientemente de las medidas.

Resumiendo, para que una situación sea un *problema geométrico* para los alumnos, es necesario que[3]:

- Implique un cierto nivel de dificultad, presente un desafío, tenga algo de "novedad" para los alumnos.
- Exija usar los conocimientos previos, pero que estos no sean totalmente suficientes.
- Para resolverlo, se deban poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema ponga en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras-cuerpos.
- En la resolución del problema, los dibujos no permitan arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema —es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta— no se establezca empíricamente, sino que se apoye en las propiedades de los objetos geométricos; aunque en algunas instancias exploratorias, se puedan aceptar otros modos de corroborar.
- Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras produzcan un nuevo conocimiento acerca de estos últimos.

[3] Sessa, C. (1998): "Acerca de la enseñanza de la geometría", en *Matemática, temas de su didáctica*. Bs. As.: Conicet.

El estudio del espacio

Los conocimientos espaciales están vinculados a las relaciones con el espacio, sus representaciones, sus desplazamientos, etcétera.

En otros términos, se trata de ideas espaciales construidas para modelizar el espacio físico, vinculadas a él, que sirven para resolver problemas del espacio real. Esto no significa confundir el espacio físico y el espacio que estudia la matemática. Con los mismos criterios con los que analizábamos anteriormente la participación de lo empírico en la construcción del conocimiento geométrico, sostenemos que los niños no aprenden los conocimientos espaciales a través de observar, tocar, etcétera.

Los conocimientos espaciales no se construyen por abstracción directa del espacio real, sino a partir de utilizar las propias conceptualizaciones en la resolución de problemas que plantea dicho espacio. Y esas conceptualizaciones constituyen los conocimientos espaciales de los alumnos. Estas avanzarán frente a la resolución de problemas espaciales. Existe una distinción entre un espacio físico o real y un espacio conceptualizado del que se ocupa la matemática.

Mencionemos un ejemplo que manifiesta esta diferencia. Un plano es una representación de la distribución de calles de una ciudad real, que puede ser utilizado por una persona para decidir cómo realizar desplazamientos en el lugar representado por ese plano, pero el plano no se confunde con el espacio físico al que representa.

En síntesis, el espacio al que se refiere la matemática no tiene existencia material, como ningún objeto matemático la tiene.

Los problemas vinculados a los conocimientos espaciales

Estos conocimientos se ponen en juego para resolver problemas cuya finalidad concierne al espacio sensible y pueden referirse a diferentes acciones, como: construir, desplazarse, desplazar objetos, ubicar objetos en el espacio, ubicarse a sí mismos, dibujar, etcétera[4].

[4] Quaranta, M. E. y B. Ressia de Moreno (2003). *Orientaciones didácticas para el Nivel Inicial (Matemática)*. Bs. As.: GCBA. Dirección Gral. de Cultura y Educación.

El lenguaje y las representaciones espaciales permiten comunicar informaciones que sustituyen la percepción. El éxito o el fracaso son determinados por el sujeto por comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido (Salin y Berthelot, 1994).

Por ejemplo, un niño anticipa que una pelota entrará en un aro determinado en función de representaciones mentales de la forma y el tamaño de ambos, y de la dirección en la que se desplazará la pelota. Esta anticipación podrá verificarse, ajustarse, etcétera, a partir del resultado del lanzamiento de la pelota.

Estos problemas varían en función del tipo de espacio del que se trate. Guy Brousseau señala que la variable "tamaño del espacio" interviene decisivamente en la resolución de problemas espaciales. Distingue tres valores para esta variable: el *macroespacio*, el *mesoespacio* y el *microespacio*, sobre los que nos detendremos a continuación. Estos valores conllevan modos diferentes de relación con los objetos incluidos en ese sector del espacio y, por lo tanto, implican modelos conceptuales distintos para orientar las acciones del sujeto. Por otra parte, en las relaciones que los sujetos deben establecer con el espacio para poder representarlo, también el tamaño es una de las variables importantes para considerar. En este sentido, según el "tamaño del espacio" con el cual interactúe el sujeto, se ponen en funcionamiento modelos conceptuales diferentes para realizar representaciones gráficas de ese espacio.

El macroespacio

Esta categoría corresponde a un sector del espacio cuya magnitud es tal que no puede obtenerse una imagen de conjunto de él sin realizar desplazamientos, o puede obtenérsela mediante conceptualizaciones que permitan reunir representaciones sucesivas. Esto es así porque, en estas dimensiones, la percepción directa de la totalidad es inaccesible. Es posible distinguir varios tipos de macroespacios como, por ejemplo, el urbano, el rural, el marítimo. Es imposible obtener una visión global simultánea de una ciudad, ese espacio sólo puede abarcarse a través de una sucesión de visiones locales, separadas entre sí por los desplazamientos que realiza el sujeto sobre la superficie terrestre. Para orientar

sus desplazamientos, debe construir una representación global del macroespacio, ligando sus visiones parciales, para recuperar la continuidad del espacio recorrido. En el caso del macroespacio urbano, existen múltiples objetos e informaciones que el sujeto puede utilizar como puntos de referencia para estructurar su representación: los nombres y la numeración de las calles, los edificios públicos, comercios, las plazas, etcétera. En el macroespacio rural, si bien la cantidad de signos para la diferenciación precisa de sus partes es menor que en el macroespacio urbano, también existen elementos que permiten ser utilizados como puntos de referencia; por ejemplo, los mojones que indican el kilometraje, los nombres de las localidades, los accidentes naturales (montes, ríos, etcétera). En cambio, en el macroespacio marítimo, como también en el desértico, no es posible recurrir a una sucesión de encuentros con determinados objetos o elementos para reproducir un trayecto. La única manera de orientarse y desplazarse en ellos es a través de conceptualizaciones que reconstruyan las informaciones que es posible obtener a partir de las escasísimas referencias que aparecen (como, por ejemplo, la posición de unas estrellas determinadas). El conocimiento sobre las representaciones del espacio y las relaciones que estas representaciones permitan establecer posibilitará la toma de decisiones en cada uno de estos ámbitos. Por otra parte, la comprobación de cuán acertadas han resultado las decisiones para actuar sobre dicho espacio se obtendrá a partir de evaluar si se logró o no la finalidad perseguida.

En otros términos, mientras menos puntos de referencia tenga el sujeto a su disposición, mayor necesidad tendrá de recurrir a una teoría para tomar decisiones, ya que los datos de la percepción no resultan suficientes. La escuela debe tomar a su cargo la enseñanza de la orientación en el espacio para garantizar que todos los alumnos alcancen un dominio en sus relaciones con estas dimensiones del espacio, tradicionalmente libradas a los aprendizajes espontáneos. Dado que no todos los sujetos alcanzan estos conocimientos de manera espontánea, se evidencia la necesidad de que existan intervenciones explícitas —es decir, educativas— dirigidas a que todos lleguen a aprender a desplazarse autónomamente en un ámbito de esta dimensión.

En relación con las representaciones gráficas del macroespacio, es necesario establecer algunas distinciones. Tanto el macroespacio marítimo, como el desértico, exigen conocimientos matemáticos inaccesibles aún a los niños. Sin embargo, cuando los chicos van a la estación de tren, a la plaza, al zoológico o a otros lugares por diferentes caminos (macroespacio urbano o rural), y los docentes plantean como problema la posibilidad de acceder a estos sitios siguiendo recorridos diferentes, estableciendo reflexiones acerca de qué podrá encontrarse a lo largo del recorrido, qué se irá encontrando en el recorrido de regreso, cómo comunicar este recorrido a otra persona, etcétera, la representación gráfica o la interpretación de representaciones ofrecidas por el docente o por la cultura —a través de planos, por ejemplo— constituyen oportunidades para que los niños comiencen a enfrentarse al problema de orientarse en el espacio y representar recorridos, anticiparlos y comunicarlos.

¿Qué condiciones podríamos pensar para que una situación tal constituya verdaderamente un problema fértil para nuestros alumnos? Si en la visita a la plaza, por ejemplo, el recorrido de regreso hacia la escuela se realiza por calles diferentes por las que fueron, los niños podrían hacer un registro de los diversos lugares por los que pasaron: distintos negocios, casas conocidas, cantidad de cuadras, etcétera. Con esos registros, ya en la clase, podrán elaborar una representación de ese espacio recorrido. Las comparaciones posteriores entre las diversas representaciones que puedan surgir deberían estar dirigidas a reflexionar acerca de la utilidad del registro previo y las dificultades vinculadas con su representación. Si en diferentes dibujos aparecieran los mismos lugares en distinto orden, un debate colectivo a propósito de su confrontación dará lugar a analizar cómo se puede hacer para estar seguro de en qué orden poner los diferentes lugares, qué cosas no pueden faltar para no perderse, por ejemplo, dónde doblar o hacia qué lado hacerlo, etcétera. Asumimos que los alumnos no podrán realizar dibujos que respeten las relaciones de perspectiva ni de tamaños de los objetos representados. Lo que interesa de la situación es que puedan tomar contacto con la necesidad de establecer puntos de referencia para poder orientarse y desplazarse en el macroespacio. También sería interesante que se discutiera si un mismo registro puede servir para orientarse por el mismo camino tanto a la ida como a la vuelta, y en qué orden entonces se irán encontrando, en cada caso, las referencias anotadas en el papel.

El mesoespacio

Esta categoría se asigna a un recorte del espacio que resulta accesible a una visión global desde una misma posición, aunque no de un solo "vistazo", sino con desfasajes temporales mínimos, es decir que, para acceder a una visión completa, se requiere de movimientos. Por ejemplo, el espacio que contiene un aula puede ser recorrido por el sujeto tanto interior como exteriormente. Contiene objetos fijos, que funcionan como puntos de referencia para los desplazamientos del sujeto por su interior: muebles, puertas, ventanas, paredes, etcétera. Las otras aulas, el patio, la puerta de entrada a la escuela, etcétera, serán los puntos de referencia para los desplazamientos exteriores.

Los desplazamientos del sujeto están restringidos y deben ser realizados en función de la localización de los objetos. Esto determina trayectos obligados, como los pasillos, las escaleras, los espacios entre mesas, etcétera, que implican la diferenciación entre espacios vacíos y llenos. Se puede decir que el *mesoespacio* es el espacio de los desplazamientos del sujeto. Las experiencias que el sujeto obtiene en estos desplazamientos son acotadas. Los puntos de vista están restringidos, por una parte, por los recorridos posibles entre los objetos fijos y, por otra parte, a causa de que los desplazamientos se realizan mayoritariamente en postura erecta; con lo cual, las direcciones horizontal y vertical se constituyen en direcciones básicas para la organización del mesoespacio. Esto no significa que sea imposible para el sujeto adoptar otras perspectivas, pero en la medida que no son usuales, no contribuyen significativamente a la estructuración del mesoespacio.

Para lograr un mayor dominio en los desplazamientos, no procediendo sistemáticamente por ensayo y error, es necesario construir una representación intelectual del mesoespacio. Si bien la exigencia de anticipaciones basadas en conceptualizaciones que colaboren en la toma de decisiones aquí es menor que la necesaria para desempeñarse en el macroespacio, la enseñanza puede intervenir para favorecer su dominio por parte de todos los alumnos. Por ejemplo, desplazar un mueble de una habitación a otra puede ser una tarea que requiera algo más que una estimación visual. Si no se realiza una anticipación midiendo el espacio determinado por la puerta en relación con las dimensiones del mueble, en muchos casos, descubriremos que el mueble "no pasa" una vez que ya nos hayamos tomado el trabajo de desplazarlo.

En relación con las representaciones gráficas del mesoespacio, un ejemplo de situación posible es pedirles a los alumnos que realicen un plano del aula para guardar de recuerdo al terminar el año, o del patio, para enviar a chicos que no lo conocen. Otro tipo de situación posible consiste en pedirles que inventen un juego desplazando la pelota en el patio y luego lo representen con lápiz y papel para poder repetirlo tal cual al día siguiente o para poder comunicarlo a un compañero que faltó. Hemos tenido la posibilidad de observar producciones de este tipo en las cuales, a través de líneas, flechas y dibujos, los niños han podido representar secuencias, como por ejemplo: hacer picar la pelota tres veces, correr hasta el árbol, dar una vuelta alrededor de él, tirar la pelota para arriba, hacerla picar tres veces, volver corriendo hasta donde está la maestra.

El microespacio

Este es el sector del espacio más próximo al sujeto y el que contiene objetos accesibles, tanto a la visión, como a la manipulación. El sujeto puede mover el objeto y a sí mismo prácticamente en cualquier dirección. Por lo tanto, es posible establecer cualquier perspectiva del objeto. A diferencia de lo que sucede en los otros tamaños del espacio, la abundancia de información que le provee la manipulación del objeto determina que, para seleccionar una acción determinada, el sujeto no necesite hacer una anticipación precisa de sus efectos, ni coordinar de antemano una secuencia de acciones. Puede intentar obtener cierto efecto todas las veces que quiera, hasta lograrlo. De hecho, en general, no necesita de muchos ensayos ya que su dominio del microespacio, tanto como la cantidad de información inmediata de la que dispone, le permiten encontrar rápidamente las acciones. Incluso en acciones

irreversibles, como la de cortar con una tijera siguiendo un contorno, la percepción inmediata del efecto permite ir haciendo correcciones a medida que se avanza. Muchas de las situaciones que ocurren en el microespacio son altamente tolerantes a la búsqueda empírica de la solución. Es decir, esta búsqueda no se vuelve muy costosa, como sucede en cambio con los otros tamaños de espacio, que requieren con más fuerza entonces de anticipaciones apoyadas en conceptualizaciones que economicen las búsquedas empíricas.

Sin embargo, es posible encontrar situaciones en el microespacio en las que sea necesaria una planificación cuidadosa de la acción y, en consecuencia, la intervención de representaciones espaciales. Por ejemplo, si los alumnos tienen que determinar la cantidad de caras que tiene un cubo para poder luego solicitarle a la maestra la cantidad de cuadrados necesarios para cubrirlas todas. Esta situación requiere poner en juego los conocimientos previos acerca de las figuras geométricas, sus características, su denominación, etcétera. Es decir, requiere tomar decisiones en el momento de la resolución, anticipaciones de lo que se necesitará para "forrar" el cubo.

Una situación que hiciera intervenir representaciones gráficas del microespacio podría consistir en pedir a los alumnos que dibujen un objeto apoyado sobre la mesa tal cual lo ven. Por ejemplo, si se apoya un muñeco sentado con un brazo levantado y el otro hacia abajo en la mitad de la mesa, y los niños se ubican en cuatro sectores de manera que algunos verán al muñeco de frente, otros de un costado con el brazo levantado, otros de atrás y los otros del otro costado con el brazo hacia abajo, las representaciones mostrarán diferencias que son producto de los diferentes puntos de vista desde los cuales se han producido los dibujos. Analizar dichas diferencias y concienciar acerca de cómo se ve el muñeco en función del lugar desde donde se lo observa es lo que nos interesa.

Resumiendo: cuando los chicos van a la estación de tren, a la plaza, al zoológico o a otros lugares por diferentes caminos, y los docentes hacen observar esto (porque justamente salen a comprobar este hecho), o cuando precisan y describen la ubicación de determinados objetos en la clase o en el patio, o bien, cuando trabajan haciendo un plano para que otro grupo encuentre algo que escondieron, cuando discuten cómo se ve un objeto dibujado desde diferentes puntos de vista, están resolviendo problemas espaciales, que involucran los tres valores de la variable "tamaño del espacio" que vimos.

Estas situaciones son factibles de ser presentadas al mismo tiempo, y no podría afirmarse que uno de los tamaños del espacio se domina "antes" que otro. Es decir, no se trata de "niveles de adquisición": esos tamaños deben abordarse simultáneamente o, sin un orden preestablecido, debe asegurarse el tratamiento de diferentes tamaños del espacio.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

¿Por qué cree que es importante, para un docente, conocer esta referencia al tamaño del espacio?

A continuación, incluimos una situación de enseñanza destinada a trabajar ubicaciones espaciales y puntos de referencia.

Dictado de maquetas[5]

Materiales:

Para cada grupo de alumnos, se contará con los elementos necesarios para construir una maqueta de una granja. Por ejemplo, 1 casa, 2 caballos, 2 vacas, 1 ternero, 4 vallas, 2 árboles diferentes, 2 ovejas, 1 pastor, etcétera.

Además, existirá un plano de apoyo, por ejemplo, una hoja tamaño oficio.

Organización de la clase:

Al tratarse de una situación de comunicación en la cual un grupo funciona como emisor de información a otro grupo que la recibe, conviene organizar la clase en una cantidad par de grupos. Así, por ejemplo, si se forman seis grupos, el A interactuará con el grupo B; el C, con el D; el E, con el F; etcétera.

A cada par de grupos, se le entrega un equipo idéntico de material.

[5] Sobre una situación de enseñanza, ver Irma Saiz (2003): "La derecha... ¿de quién? Ubicación espacial en el Nivel Inicial y en el Primer Ciclo de la EGB", en Mabel Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y Propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Consigna:

Si se hubieran constituido, por ejemplo, 6 grupos, se advertirá que el A trabajará con el B, el grupo C trabajará con el D, y el E trabajará con el F. Los grupos A, C y E tienen que construir la granja sobre la hoja de papel. Cuiden que los otros compañeros no vean cómo lo hacen. Luego deberán darle indicaciones al otro grupo para que ellos puedan ubicar todo el material de la misma forma que ustedes lo hicieron. Cuando terminen, vamos a comparar las dos granjas, veremos si quedaron iguales y analizaremos qué pasó.

Comentarios:

Es muy importante repetir la experiencia varias veces en diferentes momentos, cambiando los roles que ejercieron los grupos: los emisores del dictado serán los grupos B, D y F; y los receptores serán los grupos A, C y E, respectivamente; y así irán alternando.

Es importante hacer esto para que todos puedan participar como emisores y como receptores de los mensajes, ya que la tarea involucrada en cada uno de estos roles hace intervenir diferentes formas de los conocimientos espaciales requeridos. La repetición de la experiencia también es importante porque pasar por la situación en reiteradas oportunidades permite que los alumnos vayan ajustando poco a poco sus mensajes basándose en las experiencias anteriores y en los conocimientos que hayan circulado en los análisis colectivos.

En general, las primeras veces que juegan, los chicos dan por supuestas muchas relaciones. Recién cuando descubren que los otros no entienden, comienzan a establecer relaciones más precisas. Por otra parte, el grupo emisor suele ubicar los elementos sin tener en cuenta si les va a resultar sencillo o no dictarles las indicaciones a sus compañeros. Progresivamente, irán descubriendo la conveniencia de armar un modelo organizado para dictar.

"Nos dijeron que pusiéramos el caballo, pero no dijeron que estaba al lado de la casa". Este es un ejemplo de las observaciones que realizan los alumnos en el marco de las interacciones que la situación permite y el docente promueve, las que los lleva a comparar las maquetas.

El grupo emisor descubre entonces que, para que su dictado sea eficaz, hay que dar otro tipo de informaciones: los puntos de referencia. Son las críticas que le plantea el grupo receptor acerca del dictado las que van a favorecer un reajuste cuando vuelvan a enfrentarse con la situación.

Algunas de estas cuestiones podrán ser retomadas por el docente en un análisis colectivo posterior: "Miren lo que pasó acá. Les habían dicho que la oveja iba a la izquierda del cerco y la pusieron de este lado, en lugar de este. Ellos estaban acá, y les dijeron... y ellos, acá pusieron la oveja, así... ¿Qué les parece? ¿Por qué les habrá quedado diferente?".

Estos avances en los conocimientos no son automáticos, desde luego. Es un proceso que va a llevar su tiempo, donde lo fundamental es cómo pueden interpretar esa información que la situación les devuelve respecto de sus decisiones y el análisis que de ello puedan realizar conducidos por el docente.

Es decir, la validación es posible, el alumno tiene la posibilidad de juzgar si el conocimiento que puso en juego como medio para resolver (anticipación) fue el adecuado o no al comparar las maquetas y descubrir si quedaron iguales o no.

Las argumentaciones que puedan empezar a intentar los alumnos en los análisis colectivos respecto de por qué no es adecuada una determinada instrucción, por qué es insuficiente, por qué hay que volver a utilizarla favorecerán los avances progresivos en los conocimientos.

Como en toda situación didáctica, debe poder diferenciarse entre cuáles son los objetivos que persigue el docente al plantear esta situación y cuál es la finalidad para el alumno que se enfrenta a ella.

La finalidad para el alumno es lograr que el otro grupo pueda reproducir la maqueta y, para ello, tratará de emitir un buen mensaje para que el otro grupo lo entienda y pueda así construir una granja igual. De ningún modo es consciente del objetivo del maestro, esto es, la enseñanza de las relaciones espaciales, tales como ubicaciones, puntos de referencia, vocabulario, etcétera.

Tener claro cuál es la finalidad para el alumno le permite al maestro, fundamentalmente, pensar acerca de sus posibles intervenciones. Por ejemplo, frente a preguntas como "¿Está bien, seño?", el docente podría centrarse en sus objetivos y, desde allí, explicar al grupo que deben dar

algún punto de referencia para que los otros puedan entenderlos; "sugerir" que indiquen a los receptores del mensaje que el caballo está a la derecha de la casa, etcétera. Si así lo hiciera, el problema perdería su riqueza, ya que los alumnos verían coartada su acción y se limitarían a seguir las indicaciones que aporta el maestro. Por otra parte, no sería la situación misma la que les demostraría a los alumnos que es necesario dar más datos para que los compañeros puedan reproducir la maqueta y, por lo tanto, no habría validación ya que el conocimiento puesto en juego no sería el de ellos, sino el del maestro.

En cambio, si la respuesta del maestro ante la misma pregunta estuviera destinada a reinstalar el problema para permitir que los alumnos puedan avanzar en sus competencias, la contestación podría ser como la del siguiente ejemplo: "¿Les parece que así se puede entender?, si les parece, adelante". O a posteriori: "¿Se entendió?, ¿qué podrían hacer para que se entienda la próxima vez que jueguen?". O: "¿Qué le tendrían que haber dictado para que el otro grupo pusiera el caballo como ustedes querían?".

Es decir, no se trata de dar información que reemplace la actividad del alumno, sino de guiar la discusión con la finalidad de que sea en la interacción con la situación donde los alumnos aprendan. El segundo grupo va a apropiarse de ciertas formas de expresión del primero y descartará otras al verificar que no son adecuadas. Paulatinamente, va a producirse la elaboración de una codificación en común, que se verá enriquecida y perfeccionada en la medida en que los alumnos dispongan de varias oportunidades de enfrentarse a esta situación o a otras similares.

Los niños construirán, de a poco, las nociones requeridas; y el docente podrá hacer institucionalizaciones[6] de esos conocimientos, con lo cual habrá avanzado en la dirección de sus objetivos.

Estos objetivos consisten en que los niños aprendan a organizar el espacio, y esto implica que tienen que descubrir que es necesario establecer relaciones entre los objetos, y que hay que encontrar pun-

[6] Identificaciones de los conocimientos que se utilizaron y que se busca señalar. Por ejemplo: "Aprendimos que, cuando decimos 'a la izquierda' o 'a la derecha', hay que aclarar a la izquierda o a la derecha de qué o de quién y mirándolo desde dónde para que se entienda bien cuál es", etcétera.

tos de referencia propios, externos, o de la hoja, para poder dictarlos. Organizar el espacio requiere de todo eso.

Al tener que hacer un dictado de las localizaciones espaciales de objetos, hay un espacio de aprendizaje y un tiempo para ir aprendiendo, para ir elaborando ideas, conceptos, vocabulario, actuando y verificando si se entendió el mensaje. Se puede modificar, reajustar, seguir discutiendo...

En cuanto a las producciones de los niños, podemos describir tres tipos diferentes:

- A veces, sobre todo inicialmente, los niños consideran que un mensaje eficiente consiste en describir los objetos. Por ejemplo: "Pongan una casa, pongan un caballo, hay dos vacas, un corral...". Es decir, no comunican ninguna relación entre los objetos y, por lo tanto, la granja no resulta igual. El hecho de que los alumnos no logren, desde un principio, la reproducción de la maqueta, ¿es un indicador de que la situación no es para ellos porque no pueden resolverla con eficiencia? Todo lo contrario, justamente, planteamos esa situación porque asumimos que no van a disponer, desde un comienzo, de los conocimientos necesarios para solucionarla. ¿Cómo podrían aprender esos conocimientos si no se enfrentan a problemas para los cuales estos sean herramientas de resolución? Por otra parte, si pudieran resolver ese problema desde un principio sin ninguna dificultad, esto significaría que los conocimientos necesarios ya habían sido aprendidos con anterioridad. Es decir, aquel no era un *problema* para ellos.
- Después de jugar algunas veces, advierten que es necesario dar información acerca de las relaciones entre los objetos. Comienzan a establecer relaciones parciales. Por ejemplo: "El árbol está al lado de la casa"; "La vaca está dentro del corral". Son relaciones parciales, en tanto no consideran las relaciones entre el árbol, la casa y el corral. No logran aún controlar la ubicación de todos los elementos entre sí. Son como pequeñas "islas" que flotan en el vacío pero, sin duda, hay un avance con respecto a las producciones anteriores.

- Finalmente, logran establecer relaciones entre todos los objetos, para lo cual utilizan puntos de referencia. "Anclan" uno de los objetos con respecto a la hoja (por ejemplo, el corral puesto en el centro) y, a partir de ahí, dictan los demás.

Buscamos que los niños progresen en la consideración y en la precisión de las relaciones espaciales entre los objetos y la necesidad de establecer los puntos de referencia. De hecho, hay errores en las reproducciones de las maquetas que son aceptados. Al no intervenir la medida, las distancias son aproximadas. Otro tipo de error generalmente aceptado por los integrantes de los grupos es la orientación de algunos elementos: que el caballo, por ejemplo, esté mirando hacia un lado o hacia otro es algo que, seguramente, no generará discusiones en un principio.

Es importante tener en cuenta la cantidad de elementos que se incluyan. Alrededor de diez objetos es lo adecuado. Si se incluyeran muchos más, los alumnos tendrían que controlar demasiadas relaciones y, por otra parte, sería mucho el tiempo que ocuparían dictando. El lector podría suponer que la tarea se facilitaría disminuyendo sensiblemente la cantidad de elementos. Ahora bien, una cantidad demasiado pequeña —por ejemplo, sólo tres— tornaría más compleja la tarea. Se requiere una cantidad mínima de elementos que permita poner en juego las relaciones entre una totalidad de objetos y, al mismo tiempo, posibilite a los niños establecer los puntos de referencia.

Otro aspecto para considerar es la variedad del material. Ubicar cuatro vacas todas iguales es más complejo que dictar diferentes objetos y ubicarlos si están interrelacionados significativamente: una granja, el comedor de una casa, una plaza, etcétera.

Pensar las prácticas

Lea la siguiente cita de *Actualización Curricular. Matemática*, de A. Castro (2000). Bs. As.: Mimeo.

> Uno de los aspectos a tener en cuenta para que los alumnos dominen sus relaciones con el espacio está dado por el manejo de un lenguaje, de un vocabulario que les permita comunicar posiciones, describir e identificar objetos, indicar oralmente movimientos, etc. Se trata entonces de que la adquisición de un vocabulario geométrico se produzca a raíz de su utilidad para resolver situaciones y es en el marco de esas situaciones que se podrá hacer surgir la necesidad de expresiones cada vez menos ambiguas.

- Establezca relaciones entre la situación descripta y las que usualmente se utilizan en los primeros grados para trabajar los mismos contenidos, por ejemplo: el maestro divide la hoja en dos planos y pide a los alumnos que peguen la figurita de la casa a la izquierda y la del árbol, a la derecha.
- Registre a través de cuál cree Ud. que se favorece la aparición de las relaciones propuestas y por qué.

Resumiendo, las prácticas de enseñanza de los conocimientos espaciales tienen que estar centradas en la resolución de problemas y en la reflexión en torno a ellos.

Por ejemplo, un niño de Primer Ciclo podría trabajar con el plano de un zoológico o del barrio después de haberlo visitado y recorrido, como representación de lo realizado. Esto es lo habitual.

Ahora bien, ¿cuál sería el interés de recurrir al plano cuando ya se recorrió el lugar? Justamente, el plano adquiere sentido como una herramienta que permite anticipar los trayectos posibles, qué animales se encuentran cerca, elegir un recorrido de acuerdo con determinados intereses o criterios, tener prevista la ubicación de los sanitarios y el lugar de las comidas, de las informaciones, la entrada y la salida, etcétera. O, también, durante el recorrido, ubicados en un determinado lugar, consultar el plano para decidir hacia qué sitio continuar o para averiguar diferentes posibilidades a fin de acceder al mismo lugar.

No estamos diciendo que no sea interesante recurrir al plano también luego del recorrido para reconstruir algunos trayectos, analizar algunas cuestiones, comunicar algo, etcétera. Sólo estamos queriendo resaltar en qué situaciones un plano realmente constituye una herramienta para la ubicación y orientación en el espacio.

Estos recursos como el del plano suponen una referencia al espacio físico, pero lo hacen de diferente manera. La primera opción presenta el plano como ilustración de un recurso para una situación que ya fue plenamente resuelta. Las últimas utilizan el plano como una herramienta para resolver problemas de localización y desplazamientos en dicho espacio.

El solicitar la realización del plano después de recorrer el lugar sugiere la creencia acerca de que existe un cierto orden evolutivo por el cual, primero, se requiere un trabajo sobre una situación concreta para, luego, poder pasar a su representación gráfica y, finalmente, simbólica. También en relación con esta idea, a veces, se cree que los niños sólo tienen posibilidades de efectuar anticipaciones después de haber pasado por la "observación" o experimentación sobre una situación "concreta".

En cambio, y siguiendo con el ejemplo anterior, sostenemos que los niños pueden interpretar el plano sin haber recorrido el zoológico; y esto genera aprendizajes acerca de la localización de los objetos y de los desplazamientos necesarios para llegar a ellos.

Proponemos que la introducción de materiales y de situaciones prácticas sea utilizada por posibilitar y requerir la toma de decisiones, anticipaciones y validaciones para resolver problemas ("¿Cómo se puede llegar al kiosco desde el lugar en que estamos parados?").

Estamos pensando que la actividad matemática desplegada frente a problemas espaciales también permite la puesta en juego de quehaceres matemáticos (anticipaciones, resoluciones, validaciones). Tales procesos, en un contexto de diversos intercambios intelectuales en la clase, generarán avances en los conocimientos de los alumnos.

El estudio de las propiedades y de las relaciones entre las figuras y los cuerpos

En las primeras aproximaciones de los niños, las figuras son marcas en el papel cuya interpretación está fundamentalmente basada en la percepción, y acerca de las cuales no se plantean todavía relaciones que puedan ser generalizadas. Pensemos, por ejemplo, en la circunferencia. Los niños están en condiciones de reconocerla y diferenciarla de otras figuras mucho antes de saber que se trata del conjunto de puntos que equidistan de un centro. Por otro lado, esta última propiedad no va a ser accesible por el sólo hecho de "observar" pasivamente dibujos de circunferencias. Será necesaria cierta actividad intelectual que trascienda el nivel perceptivo para que la propiedad se torne observable.

Para que los alumnos puedan profundizar sus conocimientos geométricos, es decir, para que puedan avanzar en el análisis de las propiedades de las figuras, será necesario —como ocurre en otros ámbitos de la actividad matemática— que el conocimiento geométrico se elabore a partir de la resolución de los problemas que los niños enfrenten. En este sentido, en el momento de pensar un proyecto de enseñanza, es importante superar la idea de que los dibujos "muestran" las relaciones que los niños deben construir. Aquello que el dibujo "muestra" —o mejor dicho, aquello que un sujeto es capaz de "ver" en el dibujo— será en función de los conocimientos que se posean con relación al objeto que ese dibujo representa.

Como ya dijimos, en ciertas prácticas, el maestro asume como estrategia para que los alumnos aprendan el mostrar el objeto que concretiza el conocimiento para enseñar. En relación con el trabajo con los cuerpos, rollos de papel, dados, con las cajas de remedio, etcétera, serán los insumos a través de los cuales se intentará que los alumnos se apropien de las propiedades de cilindros, cubos, prismas. Como suele ocurrir la mayoría de las veces, los alumnos no "ven" lo que el maestro pretende, con lo cual se ve obligado a "hacerles ver". Las definiciones son entonces las herramientas de las que se vale el maestro para que los alumnos se apropien de esos conocimientos.

Creemos que el malentendido estriba en confundir "dibujo" con "figura". Lo primero designa al dibujo concretamente trazado sobre una hoja de papel que "se parece" a una determinada forma geométrica, a la cual intenta representar. En cambio, lo segundo designa a un objeto geométrico, un "objeto ideal" de la matemática, puramente conceptual, que no tiene existencia física. El problema didáctico es cómo hacer para que los alumnos se apropien de lo que no se "ve": no se ve que los cuatro lados de un cuadrado son iguales; tampoco, que sus cuatro ángulos miden 90° y, mucho menos, que sus dos diagonales se cortan perpendicularmente en el punto medio y son iguales.

Es necesario que los docentes comprendan la naturaleza "ideal" de los objetos geométricos —líneas, puntos, cuerpos, figuras, etc.— que permiten modelizar algunas formas y relaciones del espacio físico real, pero no se corresponden exactamente con ninguna de ellas, como suele ocurrir con los modelos.

Una posible situación de enseñanza para establecer las relaciones entre cuerpos y figuras para plantear en Primer Ciclo es la siguiente.

Situación de pedido de figuras[7]

El maestro entrega a cada pequeño grupo de alumnos (3 ó 4 integrantes) un cuerpo geométrico. Por ejemplo, un cubo o un prisma rectangular, o una pirámide.

Sobre una mesa distante de las que trabajan los alumnos, se dispone de las figuras geométricas necesarias para cubrir cada una de las caras de los diferentes cuerpos.

El docente explica a sus alumnos que esta es una situación de "pedidos". Cada grupo debe discutir y ponerse de acuerdo sobre el tipo y la cantidad de figuras necesarias para cubrir por completo el cuerpo que tienen. Un integrante del grupo, una vez que hayan tomado las decisiones, se acercará a la mesa en donde se encuentra la maestra para entregar el pedido por escrito, en el que no podrán incluir dibujos.

[7] Quaranta, M. E. y B. Ressia de Moreno (2003): óp. cit.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Le pedimos que analice, respecto de la situación anterior, las siguientes cuestiones:

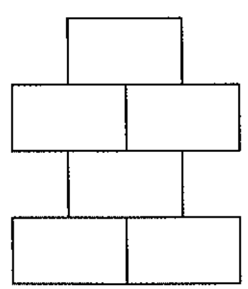
- ¿Cree Ud. que la actividad constituye un problema? ¿Por qué?
- ¿Qué papel juega lo perceptivo?
- ¿Cuáles son los conocimientos mínimos que la situación exige utilizar?
- ¿Qué tipo de validación permite la situación?

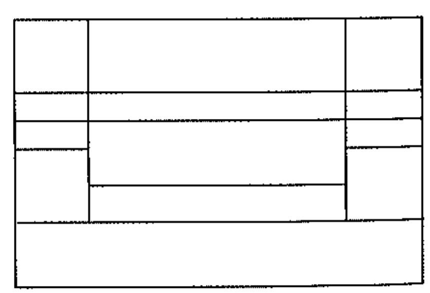
Nos parece importante resaltar que no se trata simplemente de un trabajo de reconocimiento perceptivo. Las tareas involucradas ponen en juego conceptualizaciones, representaciones espaciales e inferencias ligadas a ellas.

Otro tipo de problemas

Representaciones gráficas bidimensionales de objetos tridimensionales

La maestra entrega "planos" para que, con cuerpos geométricos, los niños realicen una construcción que resulte igual al modelo. Por ejemplo:





Posteriormente, serán los alumnos quienes deberán hacer una construcción, elaborar la representación bidimensional y enviarla para que otro grupo —que no ha visto la construcción— la reproduzca.

Las dificultades propias del dominio de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales deberán ser objeto de análisis y de reflexión grupal. Por ejemplo, ¿qué condiciones requiere un dibujo para que el otro grupo no confunda el cuerpo que debe utilizar, ni la posición de este último?

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Reflexione acerca de las siguientes cuestiones:

- La mayoría de las veces, los alumnos no logran realizar sus representaciones reproduciendo las formas, los tamaños, las localizaciones de una manera exacta. Esto, ¿invalida la situación? ¿Por qué? ¿Cuál sería su sentido?
- ¿Qué permitirá a los alumnos "ajustar" sus producciones de manera tal que tanto las representaciones como las construcciones que realicen sean cada vez más cercanas a lo que se espera?
- ¿De qué modo el docente podrá intervenir para ayudar a los alumnos a anticipar si lo realizado resultará correcto?

Copia de un espacio bidimensional

También esta actividad plantea ciertas cuestiones interesantes desde la mirada de la geometría.

Por ejemplo: ampliar o reducir el tamaño de un modelo a través de un dibujo.

Con figuras geométricas, puede pedirse a los alumnos que armen una forma cualquiera. Luego, deberán reproducir en una hoja lo construido, en tamaño reducido y enviarlo a otro grupo para que, con el mismo material, lo reproduzcan.

PENSAR LAS PRÁCTICAS

- ¿Qué tipo de relaciones deben considerarse para poder resolver esta situación?
- ¿Qué diferencias implicaría la resolución de la misma situación, pero con hoja cuadriculada o con hoja lisa?

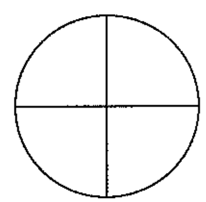
Profundizar el estudio de las figuras

En el capítulo 1 de este libro, cuando se alude a la actividad matemática, se puede leer lo siguiente: "... podemos decir que un problema es tal en la medida que invita a un desafío y a la toma de decisiones en donde los conocimientos de que se disponen no son suficientes, pero tampoco tan escasos. La situación debe estar ubicada en el centro de la balanza entre lo 'nuevo' por producir y lo 'viejo' que ya se sabe...".

Es reconocido que parte del trabajo geométrico involucra estudiar y tratar con las propiedades de las figuras. Cabe, entonces, la siguiente pregunta: ¿qué tipo de tareas, actividades, situaciones, que preserven el espíritu del trabajo que se viene proponiendo, permitirán profundizar este estudio?

PENSAR LAS PRÁCTICAS

Se le entrega a cada alumno una hoja con un dibujo como el siguiente. La tarea de los niños es copiarlo en una hoja en blanco, usando los instrumentos de geometría que consideren necesarios.



- ¿Qué conocimientos deberían tener los alumnos para resolver este problema?
- ¿Qué supone que harán alumnos de 4.° año/grado de Educación Primaria para resolver la tarea propuesta?
- ¿Qué errores supone que cometerán?
- ¿Cómo se podrá dar cuenta de si la copia coincide o no con el original?
- ¿Con qué contenidos geométricos se podría relacionar esta situación?

Esta actividad invita a analizar un tipo de tarea que, en función de los conocimientos de los alumnos y de los contenidos que se pretenda abordar, puede resultar fértil para el estudio de las propiedades de las figuras geométricas. Se trata de actividades de copiado de figuras[8], en las cuales los alumnos deberán tener en cuenta sus elementos, sus medidas, identificar ciertas características, preservar ciertas relaciones y propiedades, así como seleccionar los instrumentos más apropiados.

Cuando un alumno tiene que copiar un dibujo, en primer lugar, debe "interrogarlo". Es decir, identificar aquellas características que lo determinan y seleccionar las que permiten hacer la copia, descartando otras que no son relevantes para la tarea. Por ejemplo, muchos alumnos intentan hacer la copia en un lugar de la hoja que resulte coincidente con el lugar de la hoja donde se encuentra el dibujo original. Es decir, consideran una propiedad de la figura el lugar que ocupa en una hoja. Y sabemos que esta cuestión no determina al objeto geométrico ni a sus propiedades.

Ahora bien, si se trata de estudiar las propiedades de las figuras, en este tipo de tarea...

> ... no es necesario explicitar las propiedades mientras se realiza la actividad. Para lograr dicha explicitación de propiedades, será imprescindible generar luego un trabajo colectivo de comunicación de procedimientos de copiado. Los alumnos podrán compartir con sus compañeros sus producciones, compararlas. El docente puede seleccionar dos o tres alumnos que deberán relatar lo realizado, o bien, reproducirlo en el pizarrón. El docente puede guiar la comparación de recursos utilizados por medio de preguntas al resto de los alumnos. Por ejemplo: ¿por dónde empezaron? ¿Alguien empezó el copiado por otro lado? ¿Todos usaron compás? ¿Alguien usó la escuadra?, etcétera[9].

De todas maneras, las actividades de copiado de figuras exigen al docente tomar ciertas decisiones didácticas que favorecerán el avance de los alumnos en relación con la conceptualización de las figuras:

[8] Ver Documento N.° 5 en P. Sadovsky y otros (1998): óp. cit.

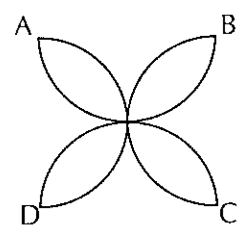
[9] Ver Documento N.° 3 (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB.* Bs. As.: Dirección de Educación General Básica. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática.

- La clase de figuras para copiar dependerá del contenido que se esté abordando en la clase.
- El tipo de hoja presentada y que utilizará el alumno (por ejemplo, en un copiado de un rectángulo, si la hoja es cuadriculada, no será necesario enfrentarse al uso de la escuadra para hacer ángulos rectos o para comparar longitudes; en cambio, el mismo copiado en hoja lisa sí lo exigirá).
- Los materiales que pueden usar los alumnos (por ejemplo, se puede poner como condición no usar escuadra para que los alumnos tengan que hacer de otros modos el ángulo recto, o no permitir el uso de regla graduada para que tengan que transportar la medida con el compás, etc.)[10].

A continuación, y para seguir analizando este tipo de problemas, le proponemos pensar en la siguiente actividad, que ha sido elaborada para docentes:

PENSAR LAS PRÁCTICAS

En una hoja lisa, intente copiar el siguiente dibujo, explicitando todas las características que ha considerado, las medidas que ha tomado y los instrumentos que ha utilizado. Luego superponga el original y la copia, y verifique si coinciden o no.



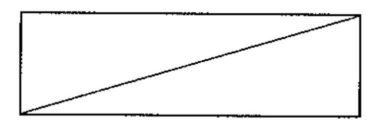
Una particularidad que puede adquirir este tipo de trabajo es que, en algunos dibujos, hay relaciones que permanecen "ocultas" al ojo, como ya se ha mencionado en páginas anteriores, pero que igual forman parte de la figura. En este caso, aunque no se lo "vea", los puntos ABCD forman un cuadrado. Y desde esta característica, conviene interpretar y comenzar a copiar la figura, aunque luego haga falta

[10] Ídem.

borrarla. Por otro lado, cada semicircunferencia tiene centro en el punto medio de cada lado del cuadrado, cuestión que tampoco es evidente. Es decir, muchas de las relaciones que determinan un dibujo serán necesariamente explicitadas en la medida en que haya que copiarlo. No alcanza con "mirarlo" para que sus propiedades puedan ser reconocidas y utilizadas.

Una cuestión para destacar en este tipo de trabajo tiene que ver con el modo de validar la tarea. Es decir, los alumnos, sin necesidad del docente, pueden dar cuenta del resultado de la reproducción por superposición. Si coinciden el original y la copia, el copiado será correcto; de lo contrario, deberá analizarse con los niños los aspectos que no han sido considerados y que propiciaron algún error. Este análisis permitirá a los alumnos interpretar nuevas relaciones que no han tenido en cuenta y que forman parte de las características que determinan el dibujo en cuestión.

Otro aspecto para destacar es el tipo de hoja en el que se propone la tarea. Si se trata, por ejemplo, de copiar el siguiente dibujo:

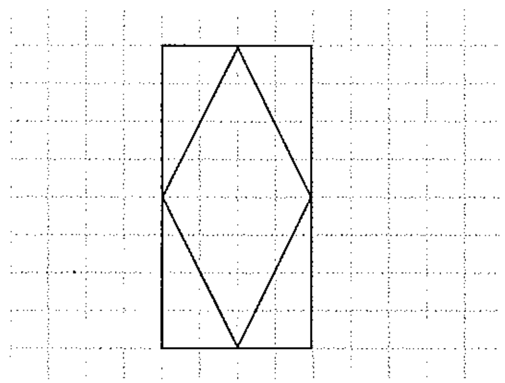


no es lo mismo si el dibujo se presenta en un papel cuadriculado, y los alumnos deben copiarlo en un papel del mismo tipo. En los primeros años de la escolaridad, el apoyo en este tipo de papel permite a los alumnos enfrentarse sólo con algunas variables: el tamaño de cada lado, la diagonal, pero este papel deja fuera otras características: los ángulos rectos que son "resueltos" por la hoja cuadriculada. En cambio, si los niños ya tienen un cierto recorrido, es posible ofrecerles el dibujo en hoja cuadriculada y que la tarea sea copiarlo en hoja lisa. En estas nuevas condiciones, el uso de la escuadra será pertinente así como la discusión acerca de los ángulos rectos. Una vez más sostenemos que, en función de la edad de los niños, sus conocimientos y los conceptos que se pretenda abordar, el dibujo, el tipo de papel y los instrumentos de geometría que se utilicen serán las variables que comanden la tarea, variables que el docente deberá determinar.

Pensar las prácticas

Se plantea a alumnos de 4.° año/grado la siguiente actividad:

Primera parte: Se entrega a cada alumno una hoja cuadriculada con el siguiente dibujo:



La consigna es la siguiente: deben copiar este dibujo en otra hoja cuadriculada, de manera tal que, al superponerlos, coincidan el original y la copia.

Segunda parte: Se les propone a los alumnos copiar ahora el dibujo, pero en una hoja lisa, de modo tal que, al superponer el original y la copia, coincidan.

- ¿Qué conocimientos deben tener disponibles los alumnos para enfrentar esta tarea?
- ¿Qué cree que los alumnos considerarán del dibujo para la primera copia? ¿Y para la segunda?
- ¿Qué errores cree que cometerán?
- ¿Qué propiedades se podrán identificar como producto del trabajo?
- ¿Qué instrumentos de geometría habilita esta actividad?
- ¿Cómo gestionaría una discusión colectiva con los niños sobre el trabajo realizado, de modo de poner en evidencia aciertos y errores, lograr avances y conceptualizaciones?

Aunque se haya mencionado antes, creemos que vale la pena insistir en la idea de que los alumnos, como parte del trabajo que se propicie, puedan involucrarse en un tipo de cultura particular que puede generarse desde la Matemática, y lógicamente, desde la geometría. Dicho trabajo presenta, entre otras, las siguientes características:

- Los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico, conceptualizado.
- Los dibujos trazados son representantes de esos objetos teóricos. Es decir, la marca que deja un lápiz cuando traza un triángulo no hace más que representarlo. Y es bien conocido que los alumnos asignan a estos dibujos numerosas propiedades o características que no tienen categoría de tales para la geometría, como la posición en la hoja. Incluso, los dibujos son "leídos" por los alumnos de una cierta manera que no siempre es aceptada por la geometría.
- Muchos problemas geométricos pueden ser, en un comienzo, explorados empíricamente, analizando diferentes dibujos que resultan sumamente útiles (como se verá más adelante) o recurriendo a mediciones. Estas experiencias permiten la obtención de resultados, la formulación de propiedades que, a esta altura del trabajo, adquirirán estatus de conjeturas y deberán encontrarse argumentos que den cuenta de la validez de lo que se afirma.
- En el trabajo geométrico, los enunciados, las relaciones y las propiedades son generales; y se establece un dominio de validez, es decir, se explicitan las condiciones a partir de las cuales una colección de objetos (los triángulos rectángulos, por ejemplo) cumplen una cierta propiedad o relación. Adquieren un cierto nivel de convencionalidad en la formulación apelando a un vocabulario mínimo necesario para poder socializarlas[11].

Intentando avanzar en la línea que se viene abordando, le proponemos realizar la siguiente actividad:

[11] Itzcovich, H. (2005): *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Bs. As.: Libros del Zorzal.

Pensar las prácticas

a. Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 6 cm y otro lado mida 4 cm. ¿Habrá un solo paralelogramo que cumpla estas condiciones?

b. ¿Cuántos paralelogramos será posible construir que tengan uno de sus lados de 7 cm, que otro lado mida 4 cm y la diagonal mida 11 cm?

c. ¿Cuántos paralelogramos será posible construir que tengan uno de sus lados de 6 cm y que los ángulos adyacentes a dicho lado midan 30° y 150°?

d. ¿Cuántos paralelogramos será posible construir que tengan uno de sus lados de 7 cm y que los ángulos adyacentes midan 40° y 120°?

e. Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 8 cm, otro lado mida 4 cm y la altura correspondiente al lado de 8 cm sea de 3 cm. ¿La construcción es la única posible?

f. Construir un paralelogramo en el cual un lado mida 7 cm; otro lado, 3 cm; y la altura correspondiente al lado de 7 cm sea de 4 cm. La construcción, ¿es la única posible?

La intención de la actividad recientemente propuesta es analizar diversos problemas que involucran construcciones geométricas. Una primera cuestión que asumimos es que "... bajo ciertas condiciones, el trabajo alrededor de las construcciones de figuras puede favorecer la puesta en juego —explícita o implícita— de algunas de las relaciones que las caracterizan. Las diferentes maneras de gestionar las construcciones en la clase supondrán para los alumnos distintas formas de desplegar el conocimiento geométrico..."[12].

Para profundizar esta cuestión, le proponemos la siguiente actividad:

[12] Ver Documento N°. 5 en P. Sadovsky y otros (1998): óp. cit.

Pensar las prácticas

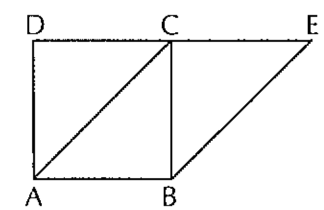
Lea las páginas 30 a 35 del Documento N.° 5 *La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo.* (1998) Bs. As. GCBA. Secretaría de Educación. Dirección de Currícula. Luego, responda a las siguientes cuestiones.

- ¿Cuál es el rol que podrían jugar los instrumentos geométricos?
- ¿Cuál es el sentido de proponer a los alumnos si se puede construir con ciertos datos, o si la construcción es única, o si hay muchas construcciones posibles?
- ¿Cómo se podría dar cuenta de la validez o no de lo construido?

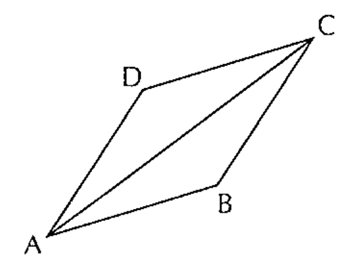
Por último, lo invitamos a resolver los siguientes problemas, que tienen por finalidad involucrar, de manera más explícita, la idea del trabajo argumentativo, propio de la actividad geométrica:

Pensar las prácticas

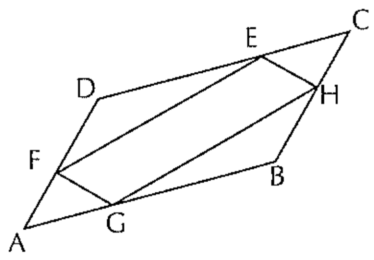
a. El siguiente dibujo está conformado por el cuadrado ABCD y el triángulo isósceles BCE, que tiene en C un ángulo recto. ¿Será cierto que el cuadrilátero ABEC es un paralelogramo?



b. Determine el valor del ángulo D, sin medirlo, sabiendo que ABCD es un rombo y que el ángulo BCA mide 20°:



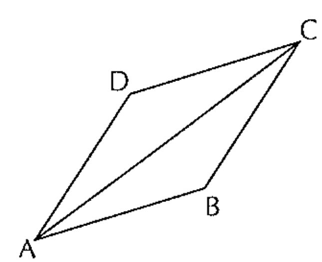
c. En el siguiente dibujo, ABCD es un paralelogramo. CE = AG y DF = BH. ¿Será cierto que EFGH también es un paralelogramo?



Para el análisis, consideremos el problema **b.** de la actividad anterior. Se trata de determinar el valor de un ángulo sin medirlo. Y esto es una parte importante de la actividad geométrica: poder conocer el valor de un área, de un ángulo; poder comparar superficies, sin necesidad de apelar al recurso de la medida. Por lo tanto, deberá recurrirse a las propiedades de las figuras con las que se trate de manera tal de poder dar cuenta de un resultado, en función de las relaciones que puedan establecerse entre los componentes de las figuras, sus propiedades y los datos que se conocen.

¿Por qué la insistencia en no medir? Si se mide, es claro que el valor del ángulo se establece sin ningún otro recurso que el del transportador. Y podría ocurrir que dos alumnos obtuvieran medidas diferentes. No porque midan mal, sino por el error que conlleva el acto de medir: el instrumento, el ojo, las líneas que quizá se deban trazar para alcanzar la medida, etcétera. Junto a esto, no se apela a propiedad alguna, con lo cual el resultado que se obtiene puede ser ese o cualquier otro. No hay manera de controlar que el resultado sea correcto.

En cambio, si se impide medir, se fuerza al establecimiento de relaciones:



Como $B\hat{C}A$ mide 20°, es seguro que $C\hat{A}B$ también mide 20°, pues en el rombo, $\overline{AB} = \overline{BC}$ y entonces $A\hat{B}C$ es un triángulo isósceles. Debe tener dos ángulos iguales. Luego, el ángulo B debe medir 140°, pues la suma de los ángulos interiores del triángulo ABC es 180°. Finalmente, $\hat{D}$ también debe medir 140° pues, en todo rombo, los ángulos opuestos son iguales. Y este es un modo —es claro que hay otros— de encontrar el valor del ángulo D con la certeza que brindan las propiedades puestas en juego.

Para concluir este capítulo, queremos mencionar que este trabajo implica, por parte del docente, una fuerte apuesta a la elaboración, identificación y validación de propiedades de las figuras por parte de los alumnos, así como el uso de dichas propiedades para producir nuevas relaciones y obtener soluciones a nuevos problemas, poniendo el acento, no sólo en los resultados a los que se arriben, sino en el modo de dar cuenta de la validez de dichos resultados. De esto se trata el trabajo geométrico, así como todo el trabajo matemático.